

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Abderrahmane Mira de Bejaia



Faculté de Technologie

Département de Génie Civil

Polycopié de cours :

---

---

**ONDES ET VIBRATIONS**

---

---

Au profil des étudiants de la 2<sup>ème</sup> année Licence du socle tronc commun du domaine  
Sciences et Technologies

Présenté par :

**Dr. SI SALEM Abdelmadjid**

Année universitaire 2019-2020

## Table des matières

Préambule .....	i
Principales notations .....	ii
<b>Introduction</b> .....	1
<b>Chapitre I : Généralités sur les vibrations &amp; Équation du mouvement</b>	
I.1 Introduction .....	3
I.2 Définition d'une vibration (Oscillation) .....	3
I.2.1 Mouvement Périodique .....	3
I.2.2 Mouvement Vibratoire Sinusoïdal .....	4
I.2.3 Représentation Complexe d'une vibration Sinusoïdale .....	6
I.3 Étude d'un mouvement vibratoire .....	7
I.3.1 Système de coordonnées et Degrés de liberté (DDL) .....	7
I.3.2 Définir les coordonnées généralisées .....	8
I.4 Choix du Formalisme .....	9
I.4.1 Formalisme de Newton .....	9
I.4.2 Formalisme de Lagrange .....	10
I.4.3 Formalisme de Conservation de l'énergie .....	13
I.5 Condition d'équilibre et stabilité .....	14
I.6 Exercices sur les vibrations et les EDM .....	15
<b>Chapitre II : Oscillations libres des systèmes à 1DDL</b>	
II.1 Introduction .....	20
II.2 Oscillations libres non amortis .....	20
II.2.1 Équation du mouvement .....	20
II.2.2 Résolution de l'équation du mouvement .....	20
II.3 Oscillations libres amorties .....	21
II.3.1 Force de frottement .....	21
II.3.2 Équation de Lagrange des systèmes dissipatifs .....	21
II.3.3 EDM des systèmes libres amorti .....	22
II.3.4 Résolution de l'EDM des systèmes libres amortis .....	23
II.3.5 Décroissement logarithmique .....	26
II.3.6 Exemple d'application .....	26
II.4 Exercices sur les oscillations libres à 1DDL .....	28

### **Chapitre III : Oscillations forcées des systèmes à 1DDL**

III.1 Introduction .....	31
III.2 Équation différentielle du mouvement (EDM) .....	31
III.2.1 Exemple (masse-ressort- amortisseur) forcé .....	31
III.3 Solution de l'équation différentielle .....	32
III.3.1 Excitation Harmonique .....	33
III.3.2 Excitation périodique .....	37
III.4 Impédance mécanique .....	37
III.5 Exercices sur les systèmes forcés à 1DDL .....	38

### **Chapitre IV : Oscillations libres des systèmes à 2DDL**

IV.1 Introduction .....	41
IV.2 Étude d'un système (masses-ressorts) à 02 DDL .....	42
IV.2.1 Équation différentielle du mouvement (EDM) .....	42
IV.2.2 Résolution de L'EDM .....	43
IV.2.3 Cas particulier .....	44
IV.2.4 Étude des modes propres .....	45
IV.2.5 Phénomène de Battement .....	46
IV.3 Application (Pendules Couplés) .....	47
IV.4 Exercices sur les systèmes à 2DDL .....	49

### **Chapitre V : Oscillations forcées des systèmes à 2DDL**

V.1. Introduction .....	52
V.2. Les EDM d'un système forcé à 2DDL .....	52
V.3. Résolution des EDM .....	53
V.3.1 Calcul de $\chi_1$ et $\chi_2$ dans le cas de faible amortissement .....	53
V.3.2 Étude de la variation de $\chi_1$ et $\chi_2$ .....	54
V.4 Généralisation sur des systèmes à Nddl .....	55
V.5 Exercices sur les systèmes forcés à 2DDL .....	56

### **Chapitre VI : Phénomène de propagation des ondes**

VI.1 Introduction .....	59
VI.2 Définition et types d'ondes .....	59
IV.3 Équation de propagation d'Alembert) .....	60
IV.4 Solution de l'équation de propagation .....	62

VI.5 Les ondes progressives périodiques sinusoïdales .....	63
IV.5.1 Dimension de propagation .....	63
IV.5.2 La longueur d'onde d'une onde progressive périodique .....	63
IV.5.3 Célérité d'une onde progressive sinusoïdale .....	64
IV.5.4 Expression mathématique de l'onde sinusoïdale .....	65
VI.6 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales .....	65
VI.7 Exercices sur la propagation des ondes .....	66
<b>Conclusion</b> .....	68
<b>Références bibliographiques</b> .....	70

## PRÉAMBULE

Le présent ouvrage est un polycopié de cours de vibrations et ondes, destiné aux étudiants du socle tronc commun du domaine Sciences et Technologies et plus particulièrement aux étudiants de 2<sup>ème</sup> année licence de la filière Génie Civil. À l'issue de ce cours, les étudiants seront initiés aux phénomènes de vibrations mécaniques restreintes aux oscillations de faible amplitude pour un ou deux degrés de liberté ainsi que l'étude de la propagation des ondes mécaniques. Les phénomènes étudiés sur les vibrations et les ondes concernent tous les domaines de la physique et de l'ingénierie. À cet effet, ce cours a été rédigé conformément au programme d'harmonisation de la licence des filières sciences et techniques.

Les phénomènes vibratoires présentent un rôle pertinent dans presque toutes les branches de la physique: mécanique, électricité, optique, acoustique, etc. Malgré leur grande diversité, ils sont régis, en tout cas dans le domaine linéaire, par les mêmes lois de comportement et peuvent être étudiés au moyen du même outil mathématique. En fait dans le présent cours « vibrations et ondes » on s'intéresse à l'étude du bilan énergétique des systèmes. Dans les situations d'oscillations l'énergie est localisée dans un espace limité, assimilée à un point qui s'étend dans un volume limité. Dans le cas des ondes, l'énergie se propage à partir d'une source qui est elle-même un oscillateur, pour aller se déposer dans la matière rencontrée, ou redirigée dans sa propagation.

Quelle que soit leur spécialité, les apprenants ont besoin des notions et connaissances préalables recommandées à savoir : fréquences propres, temps de relaxation, modes de vibration, interférence, vitesse de phase, vitesse de groupe, polarisation .... Ces notions sont également introduites dans les nombreux exercices groupés par sections et classés par difficulté croissante proposés dans ce polycopié de cours.

## PRINCIPALES NOTATIONS

### Abréviations

---

EDM	Équation différentielle du mouvement
DDL	Degrés de liberté
VS	Vibration sinusoïdale

### Symboles

---

$T$	Période des oscillations
$\varpi$	Pulsation propre du système mécanique
$f$	Fréquence des oscillations
$q_i$	Coordonnées généralisées du système
$q(t)$	Fonction d'élongation
$L$	Lagrangien du système
$T_s$	Énergie cinétique du système
$U_s$	Énergie potentielle du système
$D$	Fonction de dissipation du système amorti
$k$	Constante de raideur du ressort
$a$	Coefficient d'amortissement
$\lambda$	Facteur d'amortissement
$\varpi_a$	Pulsation amortie du système mécanique
$\xi$	Taux d'amortissement
$x_H(t)$	Solution harmonique de l'EDM des systèmes forcés
$x_p(t)$	Solution particulière de l'EDM des systèmes forcés
$B$	Bande passante
$Q$	Facteur de qualité
$Z_e$	Impédance mécanique
$\chi$	Amplitude du mouvement en régime forcé
$S(r, t)$	Fonction de l'action d'une onde
$y(x, t)$	Expression mathématique de l'onde sinusoïdale
$\bar{A}$	Amplitude complexe du mouvement vibratoire

# *Introduction*

Les phénomènes vibratoires traitent les oscillations des systèmes mécaniques qui sont connus par leur essor important dans le domaine de la physique. À titre d'exemple, le phénomène vibratoire qui peut solliciter les systèmes et les structures de génie civil est le séisme. En effet, les grandeurs physiques (déplacement, vitesse, pulsation...) sont des variables qui dépendent du temps, elles seront étudiées à travers le comportement des systèmes à un ou plusieurs degrés de liberté libres et forcées en présence ou en absence des amortissements. Dans la partie « vibrations », les systèmes traités sont caractérisés par des équations du mouvement de type : équations différentielles linéaires. Ce qui permet de décrire de diverses caractéristiques importantes de vibrations.

En physique, une onde est définie comme la propagation d'une perturbation. Il s'agit donc d'un phénomène qui fait intervenir à la fois l'espace et le temps. Pour étudier les ondes, il faut d'abord introduire une perturbation nommée : source. Cette dernière provoque un mouvement de propagation à travers un milieu d'un endroit à un autre modifiant temporairement ses propriétés (vitesse, position, énergie). Après le passage de la perturbation, le milieu reprend ses propriétés initiales. En effet, dans la partie « ondes » on s'intéresse d'une part à une série de phénomènes qui sont décrits par une fonction qui dépend à la fois du temps et d'une variable d'espace. D'autre part, à la résolution de l'équation de propagation d'Alembert à seule dimension seulement et cela vue le manque des connaissances préalables au cours des trois ans de la Licence.

Adapté aux tendances actuelles des méthodologies d'enseignement, ce cours propose un ensemble d'outils pédagogiques qui permettent de mieux assimiler les phénomènes de vibration et de propagation. Par conséquent, les principaux objectifs soulignés à travers les différents chapitres du présent cours sont :

- Comprendre les notions nécessaires de base sur le calcul des phénomènes de vibrations et ondes mécaniques ;
- Élaborer toutes les étapes permettant de modéliser un système mécanique en oscillation, à savoir : la détermination et la résolution de l'équation différentielle qui régit le mouvement ;
- Appliquer les phénomènes de vibrations mécaniques restreintes aux oscillations libres et forcées de faible amplitude pour des systèmes à 1 ou 2 degrés de liberté ;
- Étudier la propagation des ondes mécaniques, et notamment établir et résoudre l'équation de propagation d'Alembert à seule dimension.



## *Chapitre I*

# *Généralités sur les vibrations & Équation du mouvement*

## I.1 Introduction

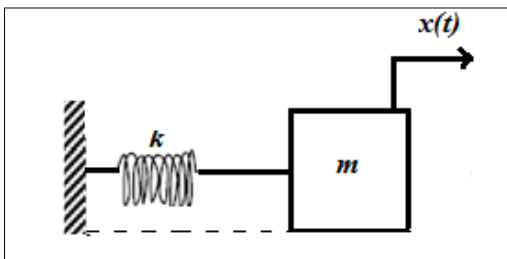
Le présent chapitre présente une description globale des mouvements oscillatoires périodiques et harmoniques ainsi que les différents formalismes permettant de déterminer les équations différentielles du mouvement des systèmes conservatifs.

## I.2 Définition d'une vibration (Oscillation)

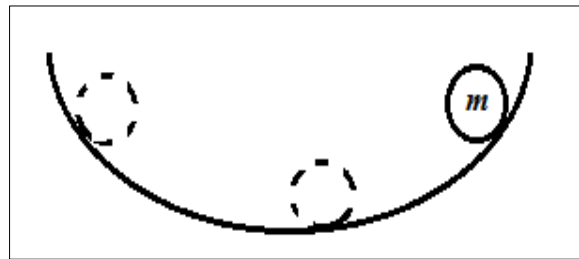
Un mouvement d'un système mécanique ou particule physique autour de sa position d'équilibre, qui se répète à des intervalles de temps réguliers.

### Exemples :

#### a. Masse-ressort



#### b. Masse au fond d'une vallée



**Figure I.1** Exemples de systèmes mécaniques en vibration

### I.2.1 Mouvement périodique

Un mouvement est dit périodique s'il se répète pendant des intervalles de temps réguliers et égaux.

- Le plus petit intervalle de répétition est appelé : **Période** (notée  $T$  (s)) ; définie par le temps qui s'écoule entre deux passages successifs de la masse en mouvement au même endroit. (voir figure I.2 et I.3)

- Le nombre de répétition par seconde est appelé : **Fréquence** (notée  $f$ , (Hertz,  $s^{-1}$ ))

avec  $f = \frac{1}{T}$  ;

- Le nombre de tour par seconde est appelé : **Pulsation** (notée  $\omega$ , ( $rad/s$ )) avec :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

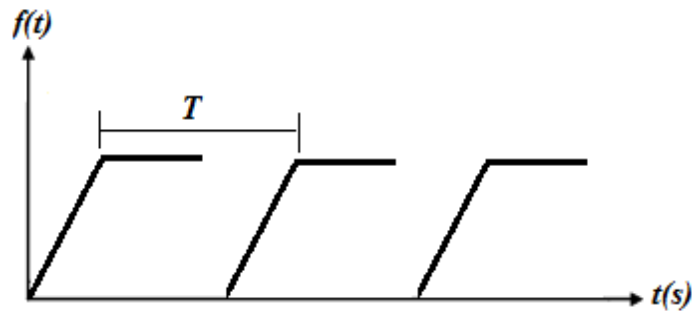
Un mouvement périodique peut avoir une allure complexe (Voir la figure I.2), il est possible de l'exprimer par la décomposition de Fourier :

La série de Fourier est une fonction  $f(t)$  de période  $T$  :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$a_0$ ,  $a_n$  et  $b_n$  : coefficients de Fourier

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases}$$



**Figure I.2** Exemple d'un mouvement périodique quelconque

Le graphe de  $a_n$  et  $b_n$  en fonction de  $n\omega$  est appelé : Le spectre de la fonction

### I.2.2 Mouvement vibratoire sinusoïdal

Un mouvement périodique qui possède une élongation (Déplacement) de type :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

- $x(t)$  : Position à l'instant ;
- L'élongation maximale, appelée : **Amplitude (A)** ;
- $\omega$  : La pulsation du mouvement  $\left( \omega(t) = \frac{2\pi}{T} (\text{rad} / \text{s}) \right)$
- $\phi$  : **phase initiale**, phase à l'instant =  $t = 0$

#### Exemple :

Sur la figure I.3 considérons un mouvement vibratoire sinusoïdal de la forme :

$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$  ; de période  $T = 0.5s$  et d'amplitude  $1cm$ .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ avec } T = 0,5s \Rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad} / s$$

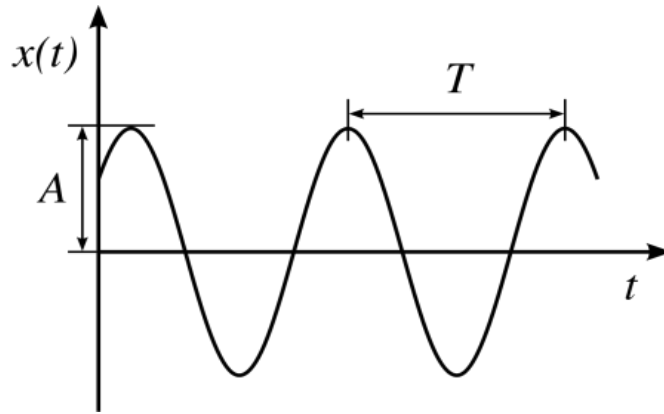


Figure I.3 Exemple d'un mouvement périodique sinusoïdal

$$A = 1 \Rightarrow x(t) = \sin(4\pi t + \phi)$$

$$\text{à } t = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

Au final, on aura la fonction de déplacement :  $x(t) = \sin(4\pi t) \text{ cm}$

**Remarque :**

a) On peut passer de la fonction **sinus** vers **cosinus** et vice-versa :

$$\cos \alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

Pour l'exemple précédent on peut écrire :  $x(t) = \sin(4\pi t) = \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

b) La vitesse et l'accélération du point oscillant est directement dérivées de l'élongation  $x(t)$  :

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) \quad ; \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t)$$

Pour l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} x(t) = \sin(4\pi t) \text{ cm} &\Rightarrow \dot{x}(t) = 4\pi \cos(4\pi t) \text{ (cm/s)} \\ &\Rightarrow \ddot{x}(t) = -16\pi^2 \sin(4\pi t) \text{ (cm/s}^2\text{)} \end{aligned}$$

c) Un mouvement vibratoire sinusoïdal est aussi dit : mouvement on oscillation harmonique, de

la même forme d'élongation :  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

### I.2.3 Représentation complexe d'une vibration sinusoïdale

Pour faciliter les calculs, les grandeurs sinusoïdales peuvent être transformées en des exponentielles, grâce à la formule d'Euler :

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \text{ Avec } j^2 = -1$$

$$\begin{cases} \text{la représentation trigonométrique : } x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \\ \text{la représentation complexe : } \bar{x}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = A e^{j\omega t} \times e^{j\phi} = \bar{A} e^{j\omega t} \quad \bar{A} : \text{Amplitude Complexe}$$

$$\text{Avec : } \bar{A} = A e^{-j\phi}$$

Basant sur la formule d'Euler :

$$\bar{x}(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} = A \left[ \underbrace{\cos(\omega t + \phi)}_{\text{Reelle}} + j \underbrace{\sin(\omega t + \phi)}_{\text{Imaginaire}} \right]$$

$$\text{Re}[\bar{x}(t)] = A \cos(\omega t + \phi) = x(t)$$

#### **Application : somme de 02 grandeurs sinusoïdales :**

Soit les 02 grandeurs sinusoïdales de mêmes pulsations :

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega t + \phi_1) \text{ et } x_2(t) = a_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Utilisons la représentation complexe pour calculer :  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

$$x_1(t) = \bar{a}_1 e^{j\omega t} \text{ Et } x_2(t) = \bar{a}_2 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow x_1(t) + x_2(t) = \bar{a}_1 e^{j\omega t} + \bar{a}_2 e^{j\omega t} = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) e^{j\omega t}$$

On note  $a = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 \Rightarrow x_1(t) + x_2(t) = x(t) = a e^{j\omega t}$

$a$  : Nombre complexe

$$|a| = |a_1 e^{j\phi_1} + a_2 e^{j\phi_2}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

Et une phase  $\phi$  qui satisfait :  $\tan \phi = \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2}$

On peut écrire  $a = |a| e^{j\phi}$

$$\Rightarrow x(t) = |a| e^{j(\omega t + \phi)} = x_1(t) + x_2(t)$$

Soit deux grandeurs sinusoïdales  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , calculer par la représentation complexe :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$x_1(t) = \sqrt{2} \cos\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_2(t) = \sin(3t + \pi) \Rightarrow \cos\left(3t + \pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(a_1, \phi_1) = \left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right) ; \left(a_2 = 1, \phi_2 = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = |A| e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$|A| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1)^2 + 2(\sqrt{2})(1)\cos\left(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

$$\tan \phi = \frac{\sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = |A| e^{j(\omega t + \phi)} = e^{j3t} = \cos 3t$$

### I.3 Étude d'un mouvement vibratoire

L'étude du mouvement nous permet d'établir l'équation différentielle du mouvement. L'étude se fait selon les sections ci-dessous :

#### I.3.1 Système de coordonnées et Degrés de liberté (DDL)

Si le système considéré est une particule « m », les coordonnées dans l'espace sont soit :

- Coordonnées cartésiennes :  $x, y, z$
- Coordonnées sphériques :  $R, \theta, \phi$
- Coordonnées cylindriques :  $\theta, \phi, z$

Le nombre de coordonnées nécessaires pour configurer un système est appelé degrés de liberté noté : DDL, il est déterminé par la relation suivante :

$$DDL = [\text{nombre de coordonnée générales}] - [\text{coordonnée} = 0 \text{ ou } Cst]$$

**Exemple 01 : Particule en chute libre**

Sur les 03 coordonnées  $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ x, & y, & z \end{matrix}$

$$y = Cst, \quad z = Cst$$

$$DDL = 3 - 2 = 1$$

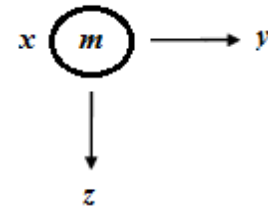


Figure I.4 Masse en chute libre

**Exemple 02 : Pendule Simple**

Mouvement repéré par  $\begin{pmatrix} 3 \\ x, y, z \end{pmatrix}$

Mouvement plan  $\rightarrow z = Cste$

$$\begin{cases} x = l \cos \theta \\ y = l \sin \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = l^2$$

$$DDL = 3 - 2 = 1$$

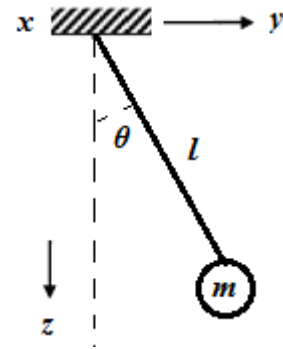


Figure I.5 Pendule Simple

$\Rightarrow$  Si le système est composé de «  $M_p$  » particules, le nombre de coordonnées :  $M_c = 3 \times M_p$  et s'il existe  $N_l$  liaison entre ces coordonnées le :  $DDL = M_c - N_l$

**Exemple 03 : Ressorts-Masses**

02 particules :

$$M_c = 3 \times 2 = 6$$

$$N_l = 4$$

$$DDL = 6 - 4 = 2$$

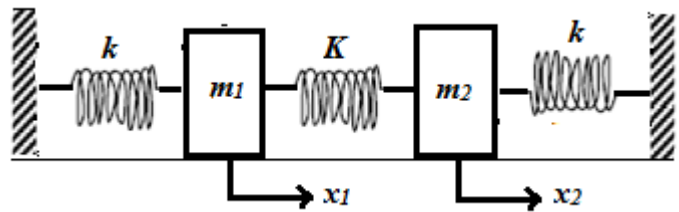


Figure I.6 Système : ressorts-masses

**I.3.2 Définir les coordonnées généralisées**

Cette étape consiste à définir la coordonnée généralisée repérée pour la configuration et la représentation d'un mouvement périodique à tout instant :

$$q_i = \text{avec } i = 1, \dots, m$$

$m$  : Nombre de DDL

**Exemple 01 : Particule en chute libre (figure I.4)**

Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont constantes, donc :

$$\begin{cases} DDL = 1 \\ q_1 = z \end{cases}$$

**Exemple 02 : Pendule simple (figure I.5)**

$$\begin{cases} DDL = 1 \\ q_1 = \theta \end{cases}$$

**I.4 Choix du formalisme**

Le choix du formalisme est le choix de la méthode de calcul à utiliser pour en aboutir à l'équation du mouvement (EDM), on distingue :

- Formalisme de Newton ;
- Formalisme de Lagrange ;
- Formalisme de conservation de l'énergie

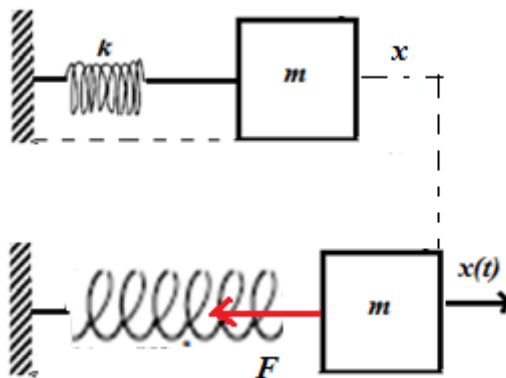
**I.4.1 Formalisme de Newton**

Ce formalisme est basé sur le principe fondamental de la dynamique (PFD), il est appliqué selon le cas de figure du mouvement à savoir : translation ou bien rotation :

$$\begin{cases} \text{Translation : } \sum \vec{F}_{ext} = m \times \vec{a} \Rightarrow \sum F = m \ddot{q} \\ \text{Rotation : } \sum M_{0/\Delta} = I_{0/\Delta} \ddot{\theta} \end{cases}$$

$I_{/\Delta}$  : Moment d'inertie, et  $\ddot{\theta}$  : Accélération angulaire

**Exemple 01 (Masse-ressort)** : considérons une masse attachée à un ressort de constante de raideur  $k$  ; appliquant un déplacement sur la masse dans la direction  $x$



**Figure I.7** Application de la PFD sur un système masse ressort

$F$  : Force de rappel du ressort :  $F = -k.x$



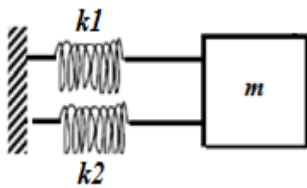
L'application du formalisme de Newton (PFD) en translation conduit :

$$\sum F = m\ddot{x} \Rightarrow -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

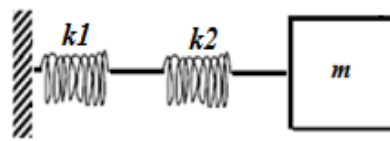
De la forme :

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

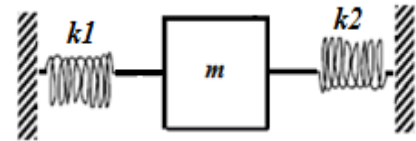
**NB :** Dans le cas de la présence de plusieurs ressorts, on procède par le calcul de raideur équivalente. Les raideurs sont liées soit en série ou en parallèle (Opposition)



Raideurs en parallèle



Raideurs en série



Raideurs en opposition

- Raideurs en parallèle (Opposition) :  $k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots$

- Raideurs en série :  $\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots$

**Exemple 02 (Pendule simple) :** Considérons le pendule de la figure ci-contre, constitué d'une tige de longueur  $l$ , l'application de la **PFD en rotation** :

$$\sum M_{/\Delta} = I_{/\Delta} \ddot{\theta}$$

$I_{/\Delta}$  : Moment d'inertie  $I_{/\Delta} = ml^2$

$\ddot{\theta}$  : Accélération angulaire

$$\sum M_{/\Delta} = I_{/\Delta} \ddot{\theta} \Rightarrow -mgx = ml^2 \ddot{\theta}$$

Avec  $x = l \sin \theta \Rightarrow -mgl \sin \theta = ml^2 \ddot{\theta}$

$$l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

Dans le cas des angles petits ( $\sin \theta \approx \theta$ )

$$l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

De la forme  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \Rightarrow \bar{\omega} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

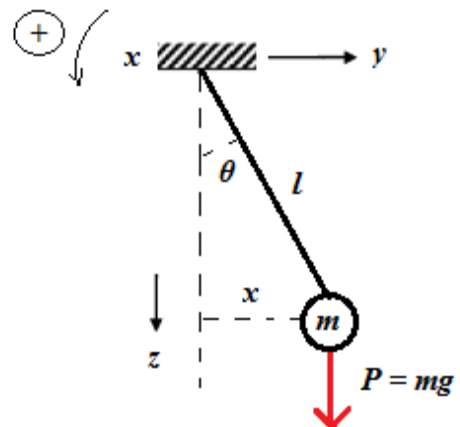


Figure I.8 La PFD sur un pendule simple

### I.4.2 Formalisme de Lagrange

Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange ( $L = T - U$ ). L'équation de Lagrange pour une particule est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} = F_{ext,q} \quad \text{Avec :}$$

$T = E_c$  : Énergie Cinétique du système ;

$U = E_p$  : Énergie Potentielle du système ;

$q$  : Coordonnée généralisée ;

$F_{ext}$  : Force extérieure généralisée.

Dans le cas des systèmes conservatifs ; la force appliquée dérive d'un potentiel  $\Rightarrow F_{ext} = -\frac{\partial U}{\partial q}$

L'équation de Lagrange des systèmes conservatifs en absences des forces dépendantes du temps (libres) et définis par une seule coordonnée généralisée (1DDL) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

- Dans le cas d'une translation suivant "x", l'équation s'écrit :  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$
- Dans le cas d'une rotation, l'équation s'écrit :  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

#### I.4.2.1 Formules usuelles

- L'énergie cinétique de translation d'une masse "m" et de vitesse "v" est :

$$T_{tr} = \frac{1}{2} m V^2 \Rightarrow T_{tr} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

- L'énergie cinétique de rotation d'un corps de moment d'inertie  $I_{/\Delta}$  est :

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{/\Delta} \dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle d'une masse dans un champ gravitationnel :

$$\begin{cases} U_{masse} = mgh & [\text{assention d'une hauteur } h] \\ U_{masse} = -mgh & [\text{descente d'une hauteur } h] \end{cases}$$

- L'énergie potentielle d'un ressort :  $U_{ross} = \frac{1}{2} kx^2$

### I.4.2.2 Exemples d'application

Reprenons les deux exemples déjà traités par le formalisme de Newton, par le formalisme de Lagrange.

#### Masse ressort :

$$T_{tr} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$U_{ress} = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{Le lagrangien } L=T-U \Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

L'équation de Lagrange est donnée comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} [m\dot{x}] + kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{de la forme} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad \omega : \text{Pulsation propre du système } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Pendule simple :** Soit le pendule de la figure ci-contre ; calculer la pulsation des petites pulsations à l'aide du formalisme de Lagrange :

$$L=T-U$$

$$T = \frac{1}{2}I_D \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2$$

$$U_{mas} = +mgh = +mg(l-l \cos \theta) = +mgl(1 - \cos \theta)$$

Dans le cas des petites pulsations :

$$\begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases} \Rightarrow 1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2}$$

$$U_{mas} = +mgl \frac{\theta^2}{2}$$

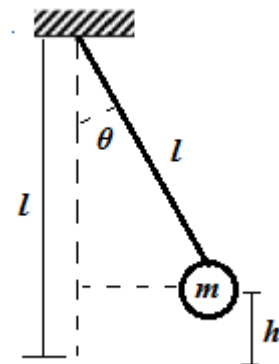


Figure I.9 Pendule simple

$$L = T - U = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl \frac{\theta^2}{2}$$

Formule de Lagrange :  $\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$  avec :  $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta}$  ;  $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\theta$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ ml^2 \dot{\theta} \right] + mgl\theta = 0 \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

### I.4.2.3 Remarques

- Dans le cas de présence des forces de frottement qui dépendent de la vitesse [Amortissement], l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (\text{Systèmes Libres amortis à 1DDL})$$

Avec :  $D$  est la fonction de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{q}^2$

- Dans le cas de présence des forces dépendantes du temps, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q} \quad (\text{Systèmes Forcés amortis à 1DDL})$$

Dans le cas d'un système à plusieurs DDL, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,q_i} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (\text{Systèmes Amortis Forcés à } n \text{ DDL})$$

### I.4.3 Formalisme de conservation de l'énergie

Ce formalisme est basé sur l'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique, qui est la somme de l'énergie cinétique et potentielle :  $E = E_c + E_p + T + U$ . Cette énergie est considérée conservée durant les oscillations (constante) d'où :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Cette équation de conservation donne l'équation différentielle des systèmes conservés [sans amortissement].

### Exemple : masse-ressort

$$E_m = T + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = \left[ \frac{1}{2} m \ddot{x} \dot{x} + \frac{1}{2} m \dot{x} \ddot{x} \right] + \left[ \frac{1}{2} k \dot{x} x + \frac{1}{2} kx \dot{x} \right] = 0$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = m \ddot{x} \dot{x} + k \dot{x} x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

### Exemple : Pendule Simple

$$E_m = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mgl \frac{\theta^2}{2}$$

$$\frac{\partial E_m}{\partial t} = ml^2 \ddot{\theta} \dot{\theta} + mgl \dot{\theta} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

## I.5 Condition d'équilibre et stabilité

La condition d'équilibre est  $F = 0$ ; si l'équation est en  $q = q_0$ ; on écrit :  $F|_{q=q_0} = 0$ , Pour les systèmes conservatifs [ $F$  dérive d'un potentiel  $\Rightarrow F = -\frac{\partial U}{\partial q}$ ]; la condition d'équilibre s'écrit :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q=q_0} = 0$$

L'équilibre d'un système est dit stable si une fois écarté de sa position d'équilibre, il effectue un mouvement oscillatoire grâce à la force de Rappel ( $F$ )  $\rightarrow F = -Cq$

$$C = \frac{-\partial F}{\partial q} = \frac{-\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial U}{\partial q} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$$

- Équilibre stable :  $C > 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} > 0$

- Équilibre instable :  $C < 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_0} < 0$

**Exemple :** Trouver les conditions d'équilibre et leur nature pour le pendule simple déjà traité dans les sections précédentes :

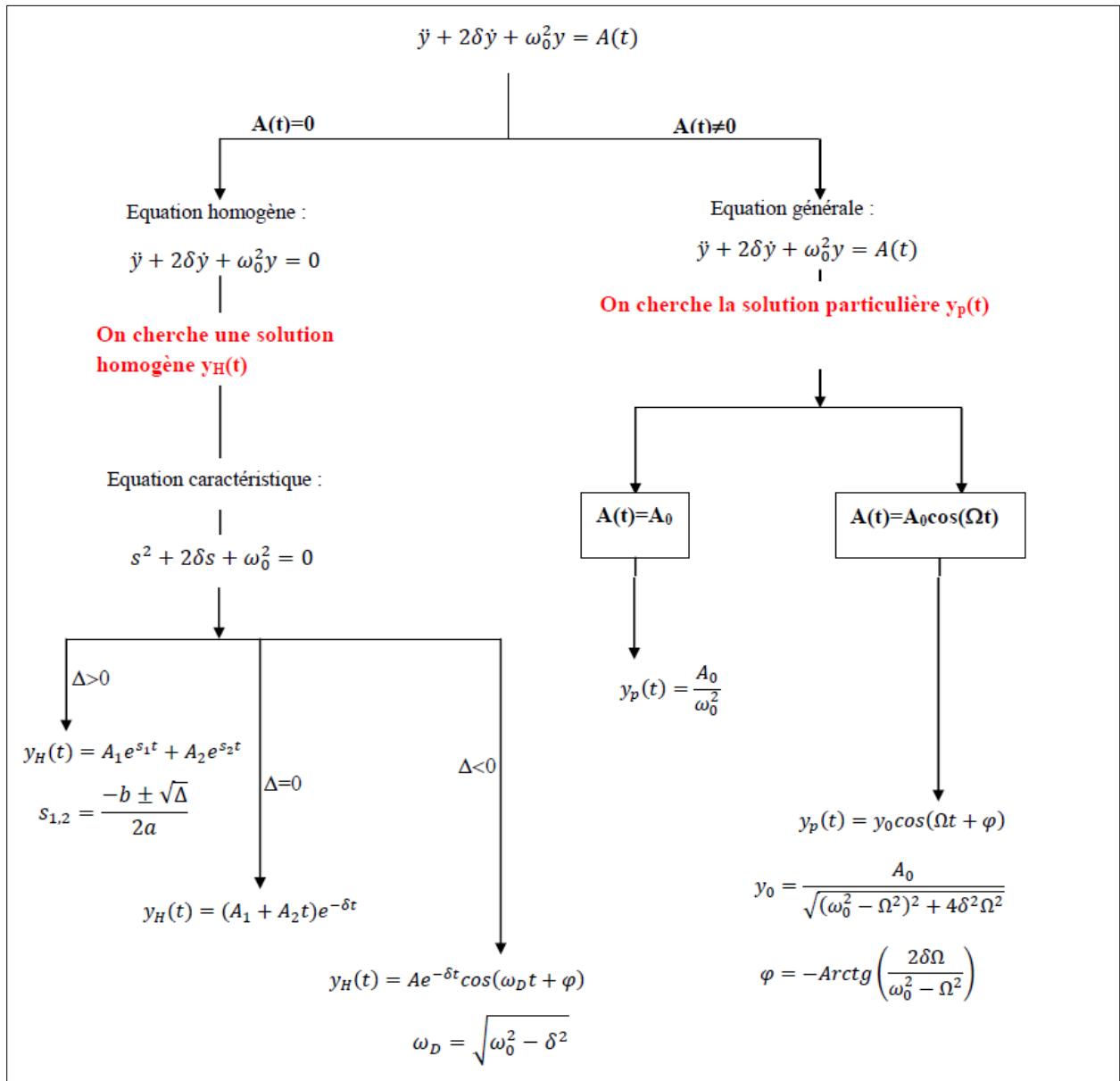
$$U = mgh = mgl(1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mgl \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ Ou } \theta = \pi$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = +mgl \cos \theta = mgl > 0 \Rightarrow \text{Stable}$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\pi} = -mgl \cos \theta = -mgl < 0 \Rightarrow \text{Instable}$$

La résolution de l'EDM du second ordre qui fera l'objet des chapitres suivants dans le cas où on cherche la solution homogène ou particulière est donnée par l'organigramme suivant :



## I.6 Exercices sur les vibrations et les EDM

### Exercice I.1

Les oscillations harmoniques d'un point matériel sont décrites par l'équation :

$$x(t) = 0,04 \cos(\pi t + \frac{\pi}{5}) \quad (m)$$

Trouvez : l'amplitude  $A$ , la pulsation  $\omega$ , la période  $T$ , la fréquence  $f$  et le déphasage initial  $\phi$

### Exercice I.2

Un système mécanique masse-ressort, oscille harmoniquement avec une amplitude  $A = 2\text{cm}$ , et une fréquence  $f = 1\text{ Hz}$ . A l'instant  $t = 0$ , son déplacement est maximum. Sachant que la masse  $m = 10\text{ kg}$ , calculer l'énergie cinétique, potentielle et totale de cet oscillateur à l'instant  $t = 2\text{ s}$  ?

### Exercice I.3

Écrire l'équation du mouvement harmonique sinusoïdal si l'accélération  $a_{\max} = 69\text{ cm/s}^2$ , la période des oscillations  $T = 2\text{ s}$  et le déplacement maximum d'un point par rapport à sa position d'équilibre à l'instant  $t = 0$  est  $x_0 = 15\text{ mm}$ .

### Exercice I.4

À l'aide de la représentation complexe calculer :

$$x(t) = \cos(\pi t + \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) + \cos(\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$x(t) = 2 \sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) + 3 \cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) + \sin(\pi t + \frac{\pi}{3})$$

### Exercice I.5

Soit la fonction périodique  $x(t)$  ci-dessous :

1. Donner la période des oscillations ;
2. Donner l'expression de  $x(t)$  sur cette période ;
3. Déterminer le développement de la série de Fourier de cette fonction.

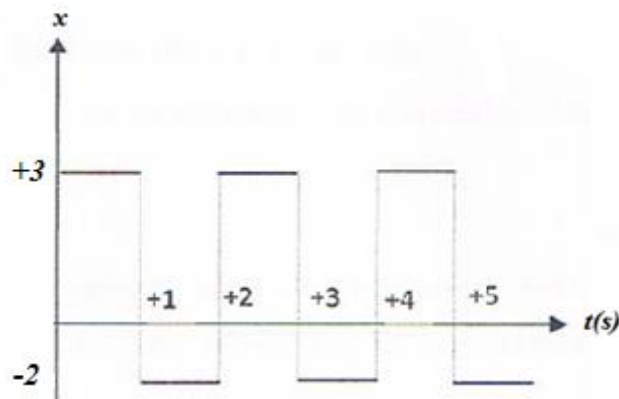
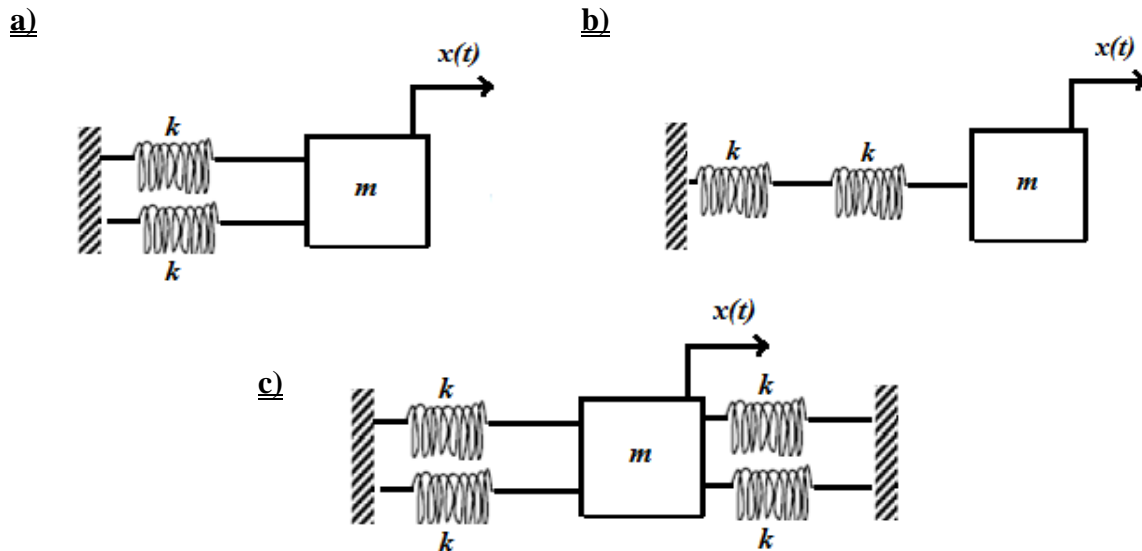


Figure I.10 Schéma représentatif pour l'exercice I.5

**Exercice I.6**

Tous les ressorts représentés sur les figures ci-dessous sont identiques (ont la même longueur à vide et la même raideur  $k$ ) et ne sont pas allongés que dans la position considérée.

1. Déterminer dans chaque cas la période des oscillations de la masse  $m$  en appliquant le principe fondamentale de la dynamique.
2. Dédurre la constante de raideur du ressort équivalent.

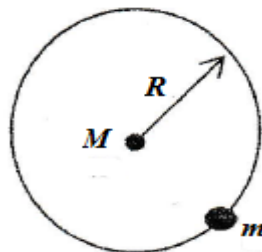


**Figure I.11** Schéma représentatif pour l'exercice I.6

**Exercice I.7**

Le système mécanique de la figure ci-contre est constitué d'un disque de masse  $M$  et de rayon  $R$ , qui peut tourner autour d'un axe passant par son centre  $O$ . Une boule de masse  $m$  est soudée à la périphérie du disque.

1. Trouver les positions d'équilibre de la boule, donner la nature de chaque position et autour de quelle position le système peut vibrer ?



**Figure I.13** Schéma représentatif pour l'exercice I.7

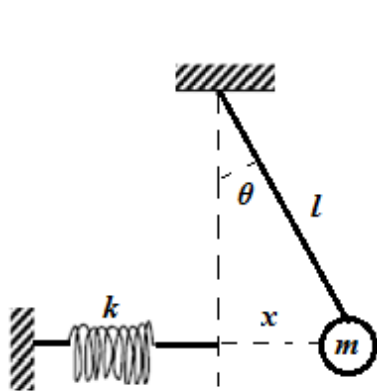
2. Déterminer dans ce cas la période propre des oscillations de faibles amplitudes en utilisant le formalisme de conservation de l'énergie de l'oscillateur ?



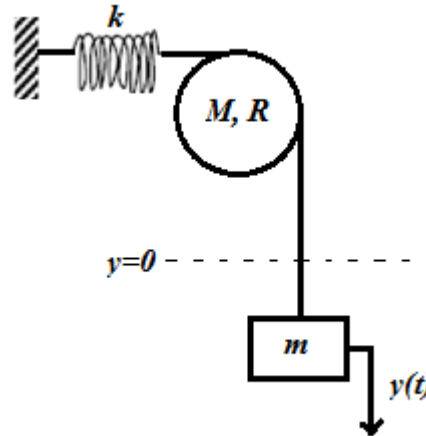
**Exercice I.8**

Dans les systèmes mécaniques représentés sur les figures ci-dessous, les positions d'équilibre sont représentées en pointillés. Les ressorts de la **fig.C** ont la même longueur à vide  $l_0$  et la longueur entre les deux bâtis est de  $2l_0$ . Considérer le cas des faibles amplitudes pour le système de la **fig.A**

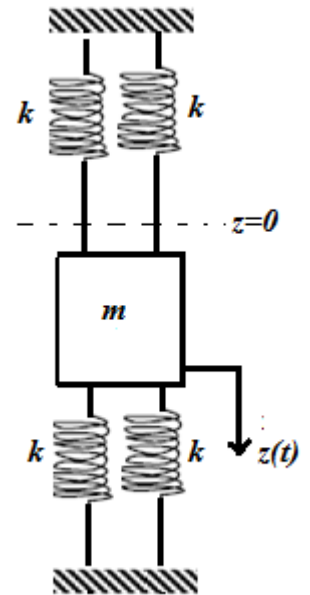
1. Trouver l'énergie potentielle des trois systèmes mécaniques ?
2. Déterminer le Lagrangien de chaque système et les équations différentielles qui régissent le mouvement des trois systèmes
3. Dédurre les périodes correspondantes



**Fig.A**



**Fig.B**

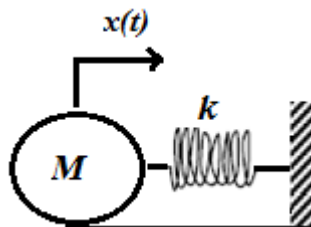


**Fig.C**

**Figure I.12** Schéma représentatif pour l'exercice I.8

**Exercice I.9**

Un cylindre de masse  $M$  et de rayon  $R$  est connecté par son centre à un support fixe avec un ressort de rigidité  $K$ . Ce cylindre roule sans glissement sur le plan. Retrouver l'équation différentielle du mouvement en appliquant les trois formalismes.



**Figure I.14** Schéma représentatif pour l'exercice I.9

## *Chapitre II*

### *Oscillations libres des systèmes à 1DDL*

## II.1 Introduction

Un oscillateur est un dispositif dont certains paramètres peuvent évoluer dans le temps de façon périodique autour d'une valeur d'équilibre. Un système régit par une seule coordonnée généralisée ( $q$ ), oscillant en absence de toute force d'excitation ( $f(t)=0$ ) est appelé, oscillateur libre à un seul degré de liberté (1DDL).

### II.2 Oscillations libres non amortis

Un système qui oscille en absence de toute force d'excitation ( $f(t)=0$ ), et des forces de frottement et de frottement ( $\dot{f}(q)=0$ ) est appelé, oscillateur libre non amorti (Harmonique).

#### II.2.1 Équation du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti est de la forme : ( $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ ). Cette équation est obtenue par le formalisme de Lagrange des systèmes conservatifs :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

#### Exemples :

Masse-ressort :  $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$  ; avec  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Pendule simple :  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$  ; avec  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

#### II.2.2 Résolution de l'équation du mouvement

L'équation différentielle d'un mouvement libre non amorti ( $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$ ) est une équation du second ordre sans second membre, sa solution est une fonction sinusoïdale de temps, de la forme :

$$q(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

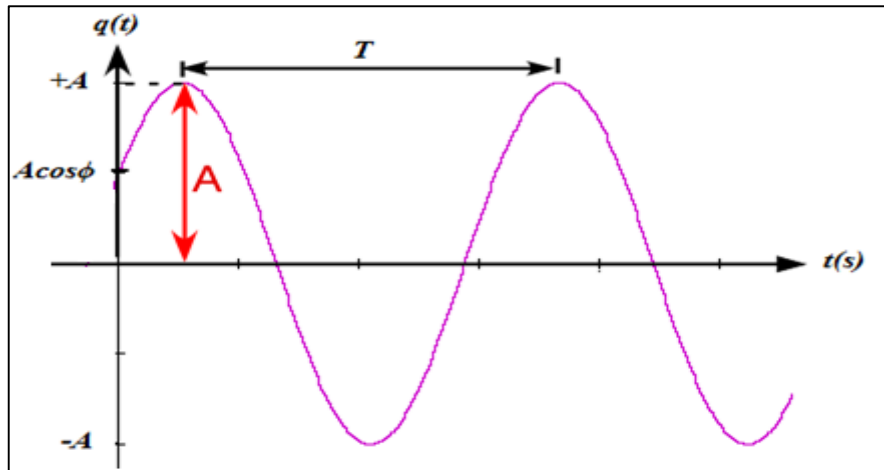
**A** : Amplitude des oscillations ;

**$\phi$**  : Phase initiale.

**$\omega$**  : la pulsation du système, elle dépend des éléments constitutifs (masse, ressort, fils...)

**A et  $\phi$**  : sont calculés à partir des conditions initiales :  $q(t=0) = q_0$  et  $\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$

Le graphe la fonction sinusoïdale  $q(t)$  de l'équation précédente est illustré sur la figure suivante :



**Figure II.1** Exemple d'un graphe de la fonction sinusoïdale

**NB :** Pour des applications d'ingénierie diverses les analogies entre le système mécanique " Masse-ressort" et les systèmes électriques suivantes peuvent être adoptées :

Déplacement : $x(t)$	Charge électrique : $q(t)$
Vitesse : $\dot{x}(t)$	Courant électrique : $i = \frac{\partial q}{\partial t}$ $i = dqdt$
Accélération : $\ddot{x}(t)$	Variation du courant : $\ddot{q}$
Masse : $m$	Inductance : $L$
Ressort : $k$	Inverse de la capacité : $\frac{1}{C}$
Force de rappel : $kx$	Bornes d'un condensateur : $\frac{q}{C}$
Force d'inertie : $m \ddot{x}$	Bornes de la bobine : $L \ddot{q}$
Énergie potentielle : $\frac{1}{2} kx^2$	Énergie électrique : $\frac{1}{2C} q^2$
Énergie cinétique : $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$	Énergie magnétique : $\frac{1}{2} L \dot{q}^2$

### II.3 Oscillations libres amorties

Dans la partie précédant, nous n'avons pas pris en considération les forces de frottement, du cout l'oscillateur oscille sans jamais s'arrêter. En réalité, le système oscille en présence des forces de frottement visqueux, et l'oscillateur fini par s'arrêter et s'équilibrer.

#### II.3.1 Force de frottement

Un système soumis à des forces de frottement est dit : système amorti, l'amortisseur est schématisé et modélisé par le schéma suivant :



Le frottement le plus simple à modéliser est le frottement visqueux qui dépend de la vitesse, il est donné de la forme suivante :

$$\vec{f} = -\alpha \vec{v} \Rightarrow f = -\alpha \dot{q}$$

- $\alpha$ : Constante positive, appelée coefficient de frottement :  $\alpha : \left[ \frac{N \cdot s}{m} \right]$
- le signe moins vient du fait que la force de frottement s'oppose au mouvement.

### II.3.2 Équation de Lagrange des systèmes dissipatifs

Tenant compte des forces de frottement, l'équation de Lagrange, s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = +f = -\alpha \dot{q}$$

On introduisant la fonction de dissipation : avec  $f = \frac{-\partial D}{\partial \dot{q}} = -\alpha \dot{q}$ , l'équation de Lagrange

s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = 0$$

Cette équation est dite équation de Lagrange des systèmes libres amortis à 1DDL, Avec  $D$  fonction de dissipation due à l'amortissement.

$$D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{q})^2$$

### II.3.3 EDM des systèmes libres amorti

Reprenons l'exemple masse-ressort soumis à une translation dans la direction ( $x$ ) en présence des forces de frottement, en utilisant l'équation de Lagrange pour aboutir à l'équation différentielle du

mouvement (EDM) :  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$

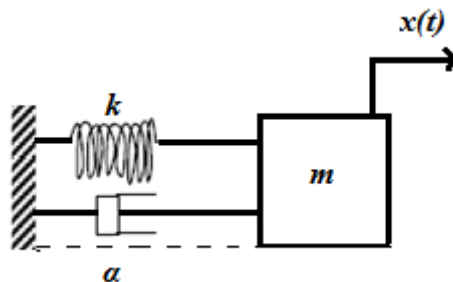


Figure II.2 Exemple d'un système masse-ressort-amortisseur

L'énergie cinétique :  $T = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2$

L'énergie potentielle :  $U = \frac{1}{2} k(x)^2$

L'énergie de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x})^2$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - \frac{1}{2} k(x)^2$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \dot{x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\left( \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \right) = \alpha \dot{x}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

C'est l'équation différentielle (EDM) des systèmes libres amortis, elle est de la forme :

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

$$\lambda = \frac{\alpha}{2m} : \text{Coefficient d'amortissement [1/s];}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{Pulsation propre (libre) [rad/s].}$$

### II.3.4 Résolution de l'EDM des systèmes libres amortis

L'équation différentielle de la forme  $\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$  est du second membre à coefficient constant sans second membre, sa solution générale est la forme :  $q(t) = Ae^{rt}$

$$q(t) = Ae^{rt} \Rightarrow \dot{q}(t) = Are^{rt} \Rightarrow \ddot{q}(t) = Ar^2 e^{rt}$$

$q(t) = Ae^{rt}$  est une solution donc elle vérifiée l'EDM, on aura alors :

$$Ar^2 e^{rt} + 2\lambda Are^{rt} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0$$

$$Ae^{rt} [r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2] = 0$$

$$Ae^{rt} \neq 0 \Rightarrow [r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2] = 0$$

Cette équation est appelée : équation caractéristique. On distingue 03 solutions en fonction du

discriminant réduit : ( $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ )

- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0$  : le système est dit : **Sur-amorti**
- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0$  : le système est dit : **Critique**
- $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0$  : le système est dit : **Sous-amorti**

➤ **Cas d'un système sur-amortis** : l'équation caractéristique admet 02 solutions réelles :

$$r_1 = -\lambda + \sqrt{\Delta'} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - \sqrt{\Delta'} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :  $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ , soit :

$$q(t) = \left[ A_1 e^{(\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t} \right] e^{-\lambda t}$$

$A_1$  et  $A_2$  : Constantes définies par les conditions initiales.

La fonction  $q(t)$  tend exponentiellement vers 0 sans oscillation. Le mouvement est aussi dit **Apériodique** (Voir la figure II.3)

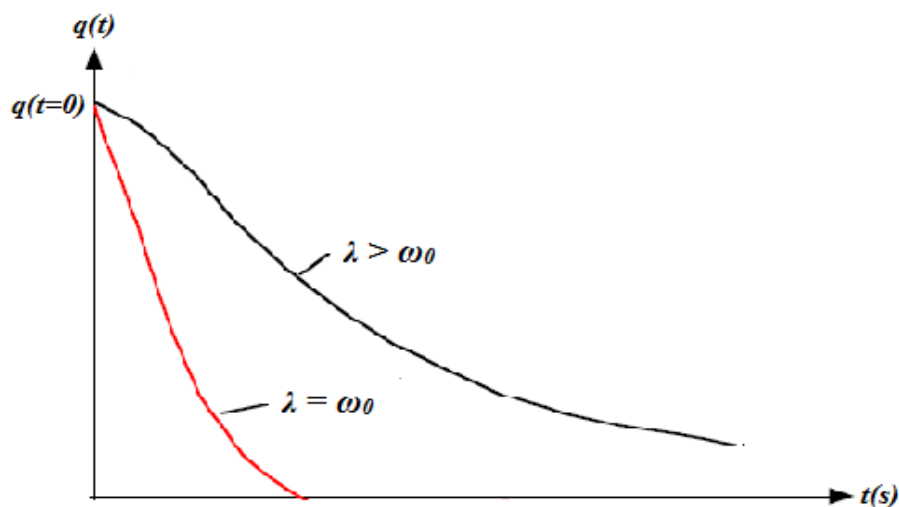
➤ **Cas d'un système critique** : l'équation caractéristique admet 01 solution unique

$$r_1 = r_2 = -\lambda$$

La solution de l'équation différentielle est ainsi de la forme (Voir figure II.3) :

$$q(t) = [A_1 + A_2 t] e^{-\lambda t}$$

$A_1$  et  $A_2$  : Constantes d'intégration définies par les conditions initiales.



**Figure II.3** Régimes apériodiques d'un oscillateur sur-amorti et critique

➤ **Cas d'un système sous-amorti :** l'équation caractéristique admet 02 solutions complexes :

$$r_1 = -\lambda + j\sqrt{\Delta'} = -\lambda + j\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda - j\sqrt{\Delta'} = -\lambda - j\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit dans ce cas :  $q(t) = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t}$ , soit :

$$q(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega_a t + \phi)$$

Ce mouvement est dit : oscillatoire amorti, ou **Pseudo périodique**, avec :  $A$  et  $\phi$  : Constantes définies par les conditions initiales ;

$$\omega_a : \text{Pulsation amortie (pseudo pulsation), tel que : } \omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

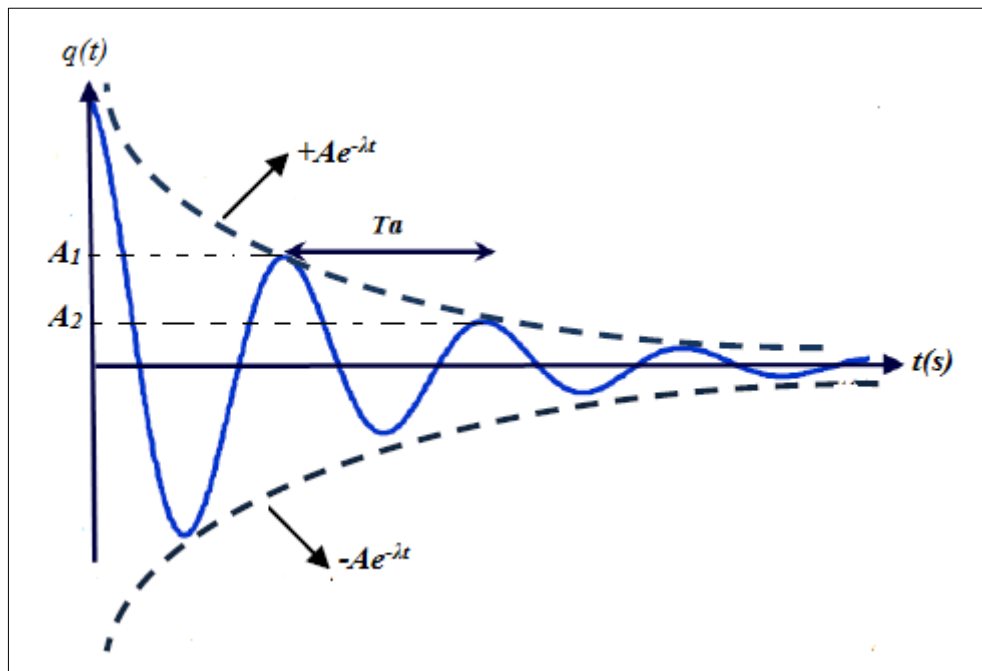
$$T_a : \text{Période amortie (pseudo période), tel que : } T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$A e^{-\lambda t}$  : Amplitude amortie, elle tend vers zéro (0) quand le temps augmente.

Dans le cas particulier où les conditions initiales sont :  $x(t=0) = x_0$  et  $\dot{x}(t=0) = 0$  on aura :

$$A = \frac{\omega_0}{\omega_a} x_0 \quad \text{et} \quad \text{tg } \phi = -\text{arctg}\left(\frac{\lambda}{\omega_a}\right)$$

La réponse d'un système sous amorti est montrée sur la figure II.4 suivante :



**Figure II.4** Réponse d'un système sous amorti



- Dans le cas des systèmes sur-amortis et critiques le mouvement n'est pas oscillatoire (non sinusoïdale) ;
- Dans le cas des systèmes sous amortis, l'amortissement est souvent exprimé en fonction du taux d'amortissement  $[\xi]$ , il représente les caractéristiques de décroissement des vibrations.

$$\xi = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{\alpha}{2m\omega_0} \Rightarrow \lambda = \xi\omega_0$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$f_a = \frac{1}{T_a} = \frac{\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi}$$

### II.3.5 Décrément logarithmique

C'est le logarithme du rapport de deux (02) amplitudes successives (voir la figure II.4) :

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} ; \text{ Avec : } t_2 = t_1 + T_a$$

$$D = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 + T_a)} = \frac{Ae^{-\lambda t_1} \cos(\omega_a t_1 + \phi)}{Ae^{-\lambda(t_1 + T_a)} \cos(\omega_a(t_1 + T_a) + \phi)}$$

$$D = \ln(e^{-\lambda T_a}) \Rightarrow D = \lambda T_a \Rightarrow D = 2\pi \cdot \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

### II.3.6 Exemple d'application

Retrouver l'équation différentielle du mouvement et la condition d'oscillation dans le cas des petites amplitudes pour le système de la figure ci-contre avec ( $OA = AB = BC = L/3$ )

- Le système est libre amorti ( $f(t)=0$ ), avec une seule coordonnée généralisé ( $q=\theta$ ). L'équation de Lagrange dans ce cas s'écrit comme suit :

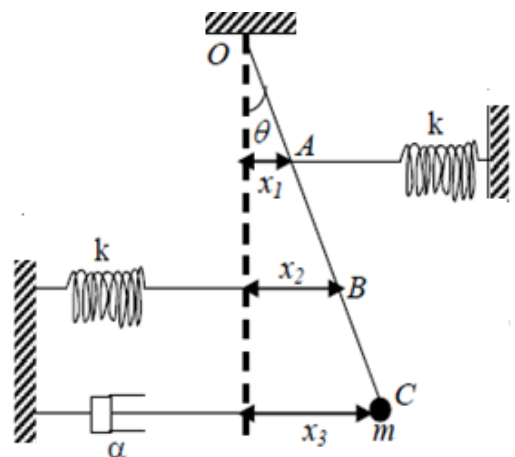


Figure II.5 Système libre amorti

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

L'énergie cinétique :  $T = T_{m/rot} = \frac{1}{2} I_O (\dot{\theta})^2$  avec  $I_{O/pendule} = m(l)^2$ , soit :

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle :  $U = U_{r1} + U_{r2} + U_m = \frac{1}{2} kx_1^2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + mgh$  ; avec :

$$x_1 = \frac{l}{3} \sin \theta ; x_2 = \frac{2l}{3} \sin \theta ; h = l - l \cos \theta = l(1 - \cos \theta)$$

Dans le cas des petites amplitudes on considère les hypothèses mathématiques suivantes :

$$\sin \theta \cong \theta \text{ et } \cos \theta \cong 1 - \frac{\theta^2}{2}, \text{ soit : } U = \frac{1}{2} k \left( \frac{l}{3} \theta \right)^2 + \frac{1}{2} k \left( \frac{l}{3} \theta \right)^2 + mg \frac{l}{2} \theta^2$$

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{5kl^2}{9} + \frac{mgl}{2} \right) \theta^2$$

L'énergie de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha (x_3)^2$  avec  $x_3 = l \sin \theta \cong l\theta$ , soit :

$$D = \frac{1}{2} \alpha l^2 \dot{\theta}^2$$

La fonction de Lagrange :  $L = T - U \Rightarrow L = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{5kl^2}{9} + \frac{mgl}{2} \right) \theta^2$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \dot{\theta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = - \left( \frac{5kl^2}{9} + \frac{mgl}{2} \right) \theta$$

$$\left( \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right) = \alpha l^2 \dot{\theta}$$

Équation de Lagrange  $\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + \alpha l^2 \dot{\theta} + \left( \frac{5kl^2}{9} + \frac{mgl}{2} \right) \theta = 0 \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta} + \left( \frac{5k}{9m} + \frac{g}{l} \right) \theta = 0$$

C'est l'équation différentielle (EDM) du système de la forme :  $\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$  : Coefficient d'amortissement [1/s] ;

$\varpi_0 = \sqrt{\frac{5k}{9m} + \frac{g}{l}}$  : Pulsation propre [rad/s].

- Pour que le système effectue un mouvement oscillatoire il faut qu'il soit sous-amorti  $\Rightarrow$

$$\lambda < \varpi_0 \Rightarrow \frac{\alpha}{2m} < \sqrt{\frac{5k}{9m} + \frac{g}{l}} \Rightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{5k}{9m} + \frac{g}{l}}$$

## II.4 Exercices sur les oscillations libres à 1DDL

### Exercice II.1

Soit un système modélisé par une masse  $M = 5$  tonnes et deux ressorts sans masses. La raideur d'un seul ressort est de  $K = 1550$  KN/m. le seul degré de liberté à considérer est le déplacement horizontal de la masse  $M$ . l'amortissement est négligeable.

1. Écrire l'équation différentielle du mouvement ?
2. Déduire la pulsation et la période des oscillations ?
3. Calculer la réponse  $x(t)$  sachant que les conditions initiales sont :  $X(t=0) = 5$  cm et  $V(t=0) = -16$  cm/s
4. Calculer le déplacement à  $t = 5$  s ?

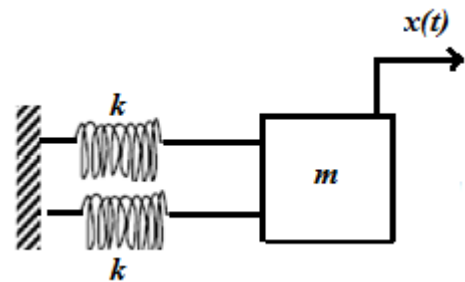


Figure II.6 Schéma représentatif de l'exercice II.1

### Exercice II.2

Les oscillations amorties d'une masse  $m = 10$  kg sur un plan horizontal accroché à l'extrémité libre d'un ressort de raideur  $k$  dont la deuxième extrémité est attaché à un bâti fixe, sont régies par l'équation différentielle suivante :

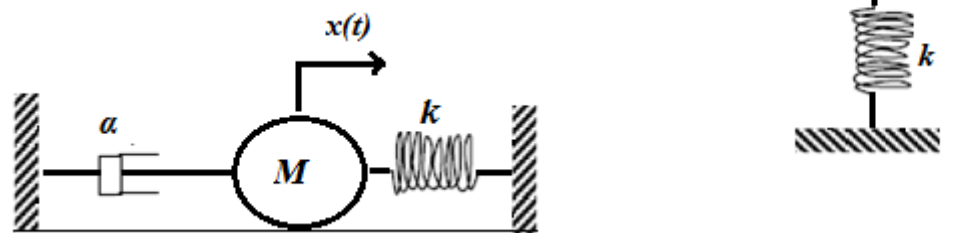
$$\ddot{x} + 8\dot{x} + 40x = 0 \quad (x \text{ est exprimé en m})$$

1. Trouver l'expression de  $x(t)$  sachant que les conditions initiales sont :  $X(t=0) = 1$  cm et  $V(t=0) = 10$  m/s
2. Après 03 oscillations complètes, de combien l'amplitude du mouvement est réduite. En déduire le décrément logarithmique ?

**Exercice II.3**

Tous les ressorts représentés sur les figures ci-dessous sont identiques (ont la même longueur à vide et la même raideur  $K$ ). Pour chaque cas de figure :

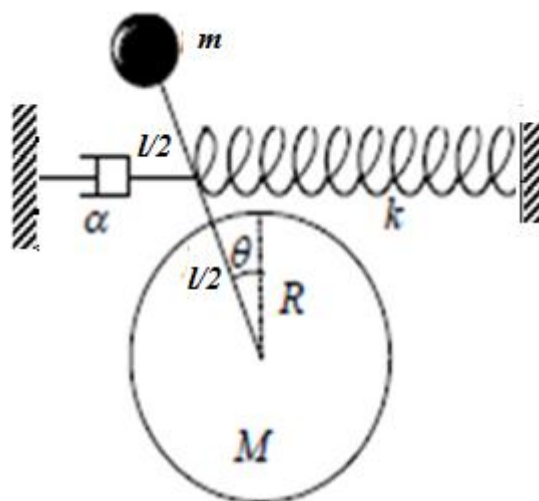
1. Retrouver l'équation différentielle du mouvement ?
2. Donner la valeur que ne doit pas dépasser le coefficient de frottement  $\alpha$  pour avoir des mouvements oscillatoires.
3. Déduire la pulsation et la période amortie du système **B** ?
4. Trouver le régime du mouvement du système **A** et son équation si  $M=1\text{kg}$  et  $\alpha = \sqrt{KM}$



**Figure II.7** Schéma représentatif de l'exercice II.3 : **Système A et Système B**

**Exercice II.4**

Retrouver l'équation différentielle du mouvement et la condition d'oscillation dans le cas des petites amplitudes pour le cas de figure ci-dessous composé : d'un disque de masse  $M$  qui peut tourner autour de son centre, attaché à une tige de masse négligeable et de longueur  $l$ . Un ressort et un amortisseur sont attachés au pendule à  $l/2$ .



**Figure II.8** Schéma représentatif de l'exercice II.4

## *Chapitre III*

### *Oscillations forcées des systèmes à 1DDL*

### III.1 Introduction

Sur le chapitre précédent, on a vu que l'amortissement fait réduire l'amplitude de vibration. Dans certain cas, pour maintenir les oscillations, il faut appliquer une force extérieure.

### III.2 Équation différentielle du mouvement (EDM)

L'équation de Lagrange des systèmes forcés à 1 DDL est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\delta L}{\delta \dot{q}} \right] - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = F_{ext}(t)$$

Pour un mouvement de rotation, l'équation s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = M(F_{ext})$$

$M(F_{ext})$  : Moment de la force appliqué

$$M(F_{ext}) = F_{ext} \times L$$

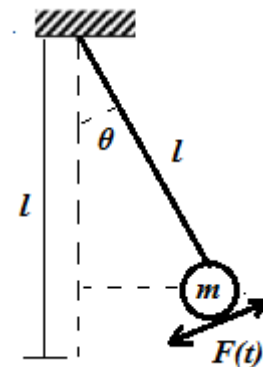


Figure III.1 Pendule simple forcé

Moment : caractérise la capacité d'une force à tourner un objet autour d'un point

#### III.2.1 Exemple d'un système forcé amorti

$$\begin{cases} U = \frac{1}{2} kx^2 \\ T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2 \end{cases}$$

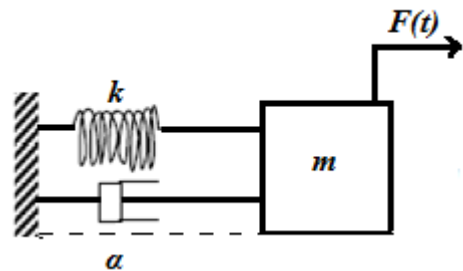


Figure III.2 Système masse-ressort forcé

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right] = m \ddot{x} \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = kx \quad ; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha \dot{x}$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F_{ext}(t)$$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_{ext}(t)}{m}$ , c'est l'équation différentielle du mouvement (EDM) d'un système amorti

forcé à 1DDL

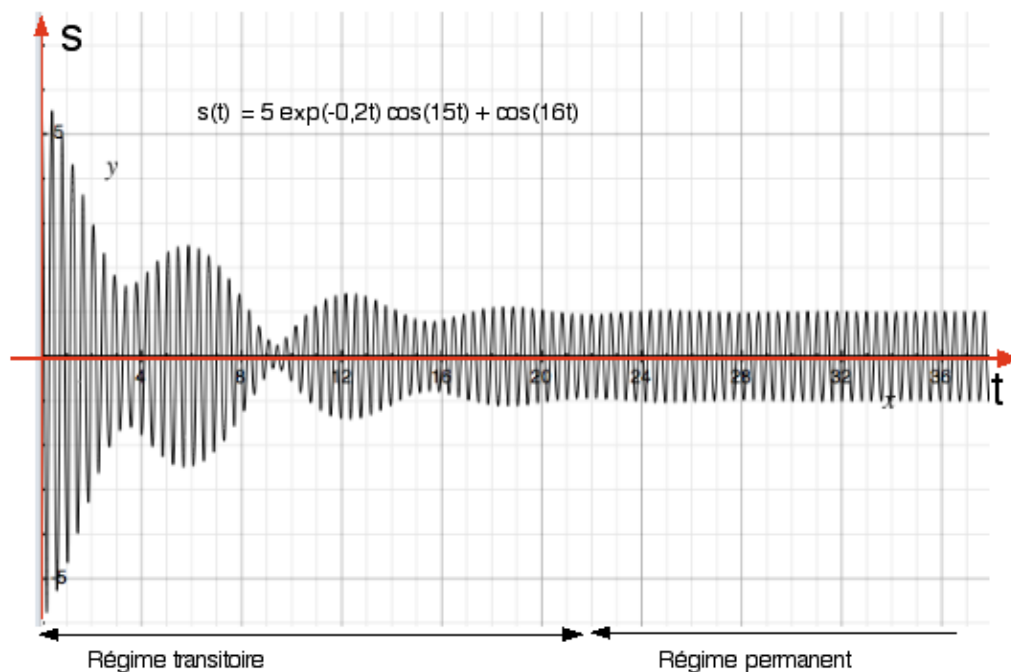
De la forme :  $\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A(t) = \frac{F(t)}{m} \end{cases}$$

### III.3 Solution de l'équation différentielle du mouvement

L'équation différentielle des oscillations forcées est du second ordre avec second membre. Sa solution est égale à la somme de la solution de l'EDM sans second membre :  $[x_H(t)]$  [solution homogène et  $x_p(t)$  solution particulière avec second membre] ; soit :

$$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$$



**Figure III.3** Exemple de réponse d'un oscillateur amorti en régime forcé [N. Aklouche, 2012]

La solution homogène de l'EDM sans second membre  $\left[ \ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \right]$  est déjà traitée dans le chapitre précédent en fonction de  $\lambda/\omega_0 \rightarrow 03 \text{ solution}$  Et dans les trois cas, le terme  $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ . Correspond : un régime transitoire [qui ne dure qu'un certain temps].

L'intervalle de temps  $x_H(t)$  n'est pas négligeable. À la fin de ce régime  $\Rightarrow x(t) \cong x_p(t)$  : ce régime est appelé : Régime permanent. (Voir figure III.3)

### III.3.1 Excitation harmonique

$$A(t) = A_0 \cos \Omega t = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t$$

La solution particulière dépend du second membre :

$$x_p(t) = \chi_0 \cos(\Omega t + \varphi)$$

$x_p(t)$  Est une solution, il vérifie l'équation  $\forall t$

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t)$$

On utilise la notation (Représentation Complexe) :

$$x_p(t) = \chi_0 \cos(\Omega t + \phi) \rightarrow \bar{x}_p(t) = \chi_0 e^{j(\Omega t + \phi)}$$

$$\bar{x}_p(t) = \chi_0 e^{j\phi} e^{j\Omega t} = \bar{\chi}_0 e^{j\Omega t}$$

$$\text{avec } \bar{\chi}_0 = \chi_0 e^{j\phi} \dots \dots \dots (1)$$

$$A(t) = A_0 \cos \Omega t = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$\dot{x}_p(t) = j\Omega \bar{\chi}_0 e^{j\Omega t} \quad ; \quad \ddot{x}_p(t) = j^2 \Omega^2 \bar{\chi}_0 e^{j\Omega t} = -\Omega^2 \bar{\chi}_0 e^{j\Omega t}$$

$$\ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \Rightarrow \left[ -\Omega^2 \bar{\chi}_0 + 2\lambda j\Omega \bar{\chi}_0 + \omega_0^2 \bar{\chi}_0 \right] e^{j\Omega t} = A_0 e^{j\Omega t}$$

$$\bar{\chi}_0 = \frac{A_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda j\Omega} \rightarrow \bar{\chi}_0 = |\bar{\chi}_0| e^{j\phi}$$

$$\chi_0 = |\bar{\chi}_0| = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}}$$

$$\bar{\chi}_0 = \frac{A_0}{z} = \frac{A_0}{|z| e^{j\phi}} = \frac{A_0}{|z|} e^{-j\phi} \dots \dots \dots (2)$$

$$\bar{\chi}_0 = \frac{A_0}{|z|} e^{-j\phi} = \chi_0 e^{j\phi} \Leftrightarrow (2) = (1)$$



$$\chi_0 = \frac{A_0}{|z|} \quad \text{et} \quad \phi = -\theta = -\text{artg} \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$$

$$\phi = -\text{arctg} \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$x_p(t) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t + \text{Arctg} \frac{-2\delta\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$$

### III.3.1.1 Étude l'amplitude $\chi_0$

On remarque que l'amplitude  $\chi_0$  est en fonction de  $\Omega \rightarrow \chi_0(\Omega)$ , comme illustré sur la figure III.4

- $\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \chi_0(\Omega) = \frac{A_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m \times \frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}$
- $\lim_{\Omega \rightarrow 0} \chi_0(\Omega) = 0$

Le maximum de  $\chi_0$  est obtenue par la valeur de  $\Omega$  qui annule  $\frac{d\chi_0}{d\Omega}$

$$\frac{dx_0(\Omega)}{d\Omega} = 0 \quad \text{Avec} \quad x_0(\Omega) = A_0 \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left[ f(x)^n \right]' = n f'(x) \times f(x)^{n-1}$$

$$\frac{dx_0(\Omega)}{d\Omega} = A_0 \frac{2\Omega \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\lambda^2 \right]}{\left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\Rightarrow 2\Omega \left[ (\omega_0^2 - \Omega^2) - 2\lambda^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \Omega^2) = 2\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$$

$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$  est la pulsation de résonance notée :  $\Omega_R$ , pour laquelle l'amplitude est maximale :

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

Pour que  $\Omega_R$  existe  $\rightarrow \omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \rightarrow \omega_0 > \sqrt{2}\lambda$

Pour qu'il y ait résonance :  $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$

L'amplitude max  $\rightarrow x_0(\Omega = \Omega_R)$  :

$$x_0(\Omega = \Omega_R) = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega_R^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega_R^2}} = \frac{A_0}{2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$x_0(\Omega_R) = \frac{F_0}{2m\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

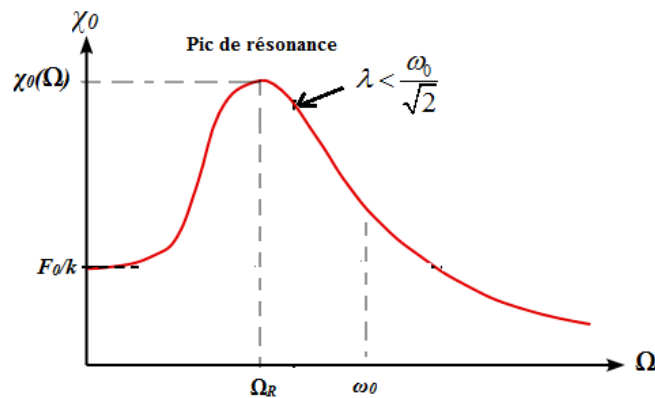


Figure III.4 Graphe de la variation de  $\chi_0$  en fonction de  $\Omega$

### Remarque :

Dans le cas des faibles amortissements ( $\lambda \ll \omega_0$ ) la pulsation de résonance :  $\Omega \cong \omega_0$ . Dans ce

cas l'amplitude max est :  $x_{0\max} = \frac{A_0}{2\lambda \omega_0}$

### III.3.1.2 Bande passante

La bande passante montrée sur la figure III.5 notée :  $B$  est définie par l'intervalle des pulsations

pour lesquelles :  $\chi_0(\Omega) > \frac{\chi_0(\Omega_R)}{\sqrt{2}}$

$$\chi_0(\Omega) > \frac{\chi_0(\Omega_R)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} > \frac{A_0}{2\sqrt{2}\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2} = 2\sqrt{2}\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

Dans le cas des petits amortissements :

$$\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \cong \omega_0 \cong \Omega$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2 = 8\lambda^2\Omega^2$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \lambda^2)^2 - 4\lambda^2\Omega^2 = 0 \rightarrow A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$\Rightarrow [(\omega_0^2 - \lambda^2) - 2\lambda\Omega][(\omega_0^2 - \lambda^2) + 2\lambda\Omega] = 0$$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega_1^2) - 2\lambda\Omega_1 = 0 \\ (\omega_0^2 - \Omega_2^2) + 2\lambda\Omega_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \Omega_1^2) = 2\lambda\Omega_1 \dots\dots\dots(1) \\ -(\omega_0^2 - \Omega_2^2) = 2\lambda\Omega_2 \dots\dots\dots(2) \end{cases}$$

$$(2) + (1) = (\omega_0^2 - \Omega_1^2) - (\omega_0^2 - \Omega_2^2) = 2\lambda(\Omega_1 + \Omega_2)$$

$$\Rightarrow \Omega_2^2 - \Omega_1^2 = 2\lambda(\Omega_1 + \Omega_2)$$

$$(\Omega_2 - \Omega_1)(\Omega_2 + \Omega_1) = 2\lambda(\Omega_1 + \Omega_2)$$

$$\Omega_2 - \Omega_1 = 2\lambda = B$$

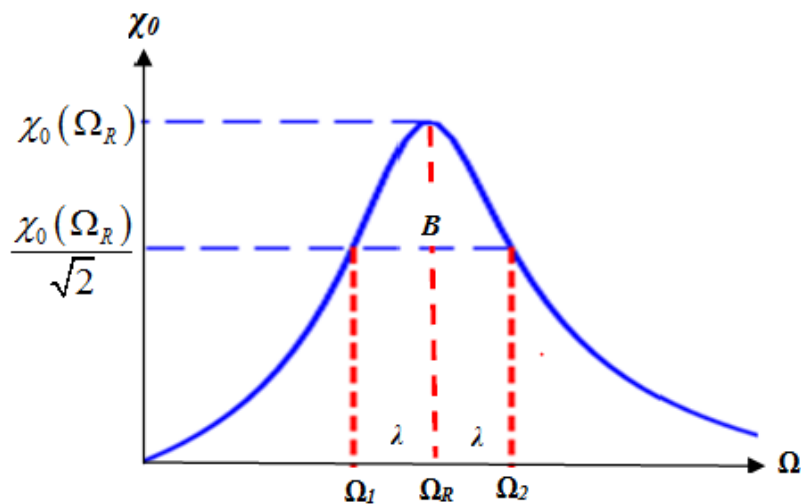


Figure III.5 Graphe de la variation de  $\chi_0(\Omega)$  : bande passante

### III.3.1.3 Facteur de qualité

Le facteur de qualité est déterminé par le rapport de  $\chi_0(\Omega = \Omega_R)$  et  $\chi_0(\Omega = 0)$ , il est défini par le rapport de la pulsation propre à la largeur de la bande passante.

$$Q = \frac{\chi_0(\Omega = \Omega_R)}{\chi_0(\Omega = 0)} = \frac{\frac{F_0}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}}{\frac{F_0}{k}}$$

$$Q = \frac{k}{2m\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \text{ Dans le cas des petits amortissements : } \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \cong \omega_0$$

$$Q = \frac{k}{2\lambda\omega_0 m} = \frac{m\omega_0^2}{2\lambda\omega_0 m_0} = \frac{\omega_0}{2\lambda} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{\omega_0}{B}$$

### III.3.2 Excitation périodique

$A(t)$ : Périodique quelconque : dans ce cas on utilise la série de Fourier :

$$A(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

La solution permanente de l'équation différentielle du mouvement  $\left[ \ddot{q} + 2\lambda \dot{q} + \omega_0^2 q = A(t) \right]$  s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum \frac{a_n \cos(n\Omega t + \phi) + b_n \sin(n\Omega t + \phi)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}}$$

### III.4 Impédance mécanique

Soit  $v(t) = v_0 \cos(\Omega t + \phi)$  la vitesse d'un oscillateur forcé, l'EDM s'écrit :

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow m \frac{\partial v(t)}{\partial t} + \alpha v(t) + k \int v(t) dt = F_0 \cos \Omega t$$

En écriture complexe :  $v(t) = \bar{v}_0 e^{j\Omega t}$  ;  $f(t) = F_0 e^{j\Omega t}$

$$\frac{\partial v(t)}{\partial t} = j\Omega \bar{v}_0 e^{j\Omega t} \quad ; \quad \int v(t) dt = \frac{1}{j\Omega} \bar{v}_0 e^{j\Omega t}$$

L'équation (1) s'écrit :

$$\left( mj\Omega + c + \frac{k}{j\Omega} \right) \bar{v}_0 e^{j\Omega t} = F_0 e^{j\Omega t}$$

On appelle le rapport des amplitudes complexes de la force  $f(t)$  et de la vitesse  $\frac{F_0}{v_0}$  : **Impédance mécanique** notée  $[Z_e]$ .

$$[Z_e] = \frac{F_0}{v_0} = m j \Omega + \overset{\text{masse}}{m j \Omega} + \overset{\text{Amortisseur}}{\widehat{c}} + \overset{\text{Ressort}}{\frac{k}{j \Omega}}$$

On déduit alors l'impédance mécanique d'un :

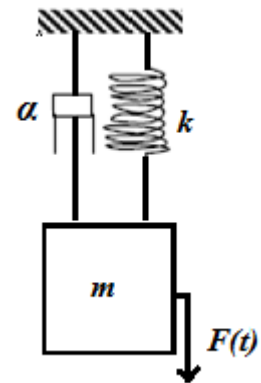
- **Ressort** :  $Z_k = \frac{k}{j\Omega}$
- **Amortisseur** :  $Z_a = c$
- **Masse** :  $Z_m = j\Omega m$

### III.5 Exercices sur les systèmes forcés à 1DDL

#### Exercice III.1

Trouver la réponse totale du système masse-ressort-amortisseur de la figure ci-contre, soumis à une force extérieure  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$  :

1. En régime transitoire à  $t = 0,1$  s ;
2. En régime permanent à  $t = 9$  s ;
3. Donner la pulsation de résonance et le déplacement max de la masse ?
4. Calculer l'impédance mécanique du système, en déduire l'amplitude de la force transmise au support ?



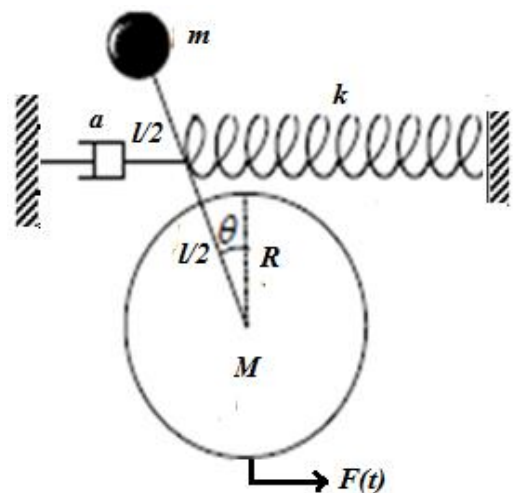
On donne :  $m = 10$  Kg,  $k = 4$  KN/m,  $\alpha = 20$  Ns/m,  $F_0 = 100$  N,  $\Omega = 10$  rad/s,  $y(t=0) = 1$  cm et  $V(t=0) = 0$

Figure III.6 Schéma représentatif pour l'exercice III.1

#### Exercice III.2

Soit le système amorti forcé  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$  de la figure ci-contre, dans le cas des petites amplitudes :

1. Retrouver l'équation différentielle du mouvement ;
2. Donner la position de la masse  $m$  à  $t = 2$  s en régime permanent ;
3. Calculer la pulsation de résonance et le facteur de qualité du système ?



Données :  $M = 2$ kg,  $m = 1$  Kg,  $k = 55$  N/m,  $\alpha = 0,2$  Ns/m,  $R = 25$  cm,  $L = 80$  cm,  $F_0 = 10$  N,  $\Omega = \pi$  rad/s.

Figure III.7 Schéma représentatif pour l'exercice III.2

## Exercice III.3

Soit le système amorti forcé de la figure ci-dessous. Le point d'attache du ressort  $K'$  est soumis à un déplacement sinusoïdal  $s(t)$  de pulsation  $\Omega$  et d'amplitude  $S_0$ .

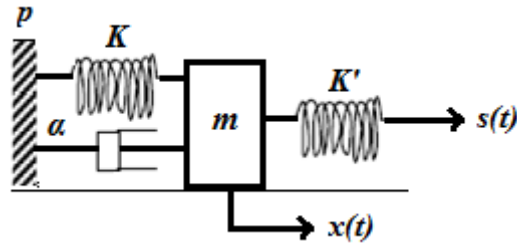


Figure III.8 Schéma représentatif pour l'exercice III.3

1. Déterminer l'EDM de la masse  $m$ . En déduire la pulsation propre, le facteur d'amortissement et la force agissante sur  $m$  ;
2. Donner le déplacement en régime permanent de la masse  $m$  ;
3. Calculer le coefficient d'amortissement  $\alpha$  pour que l'amplitude de la masse soit égale à  $S_0/10$  et  $\Omega = \omega_0$  ; Données : ( $K = K' = 10 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,1 \text{ kg}$  et  $S_0 = 1 \text{ cm}$ ) ;
4. Déterminer le module de l'amplitude de la force transmise au support P ?

## Exercice III.4

Le portique schématisé sur la figure ci-dessous est composé de deux poteaux de raideur  $k/2$  chacun et d'une dalle de masse  $m$ , est soumis à une accélération harmonique du sol.

1. Trouver la réponse subie par la dalle (EDM) ?
2. Calculer le déplacement horizontal de la dalle en régime permanent quand l'accélération du sol est donnée par  $\ddot{x}_g(t) = 100 \cos 25t \text{ (mm.s}^{-2}\text{)}$

Données :  $m = 2 \text{ tonnes}$ ,  $k = 0,1 \text{ MN/m}$ ,  $\alpha = 20 \text{ Ns/m}$ ,  $x_g(t=0) = V_g(t=0) = 0$

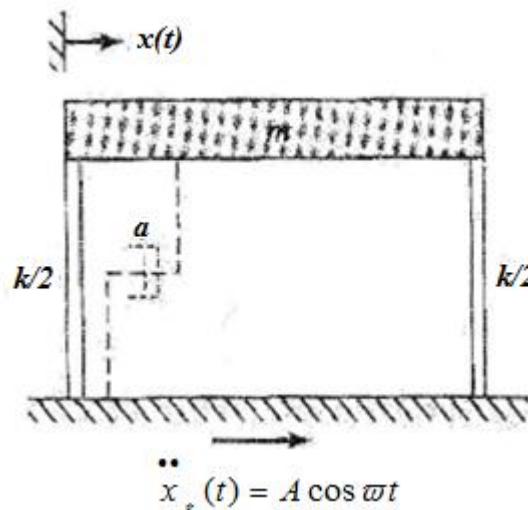


Figure III.9 Schéma représentatif pour l'exercice III.4

## *Chapitre IV*

# *Oscillations libres des systèmes à 2DDL*

**IV.1 Introduction**

Les systèmes mécaniques qui nécessitent **Deux coordonnées indépendantes** pour spécifier leurs positions sont appelés : **Systèmes à 02 DDL**. Il y a autant d'équation de Lagrange que de DDL

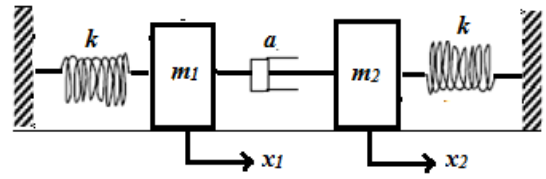
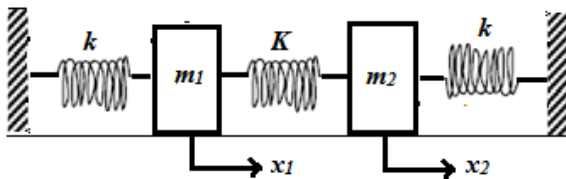
$\Rightarrow 2DDL \Rightarrow 02$  équations de Lagrange de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right] - \left[ \frac{\partial L}{\partial q_1} \right] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right] - \left[ \frac{\partial L}{\partial q_2} \right] = 0 \end{cases}$$

Il existe trois types de couplage : élastique, inertiel et visqueux, récapitulés sur la figure ci-dessous

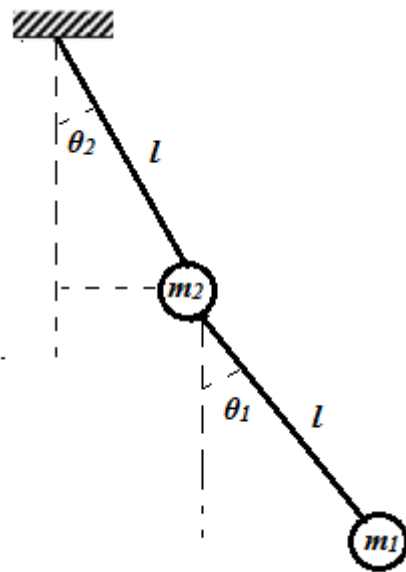
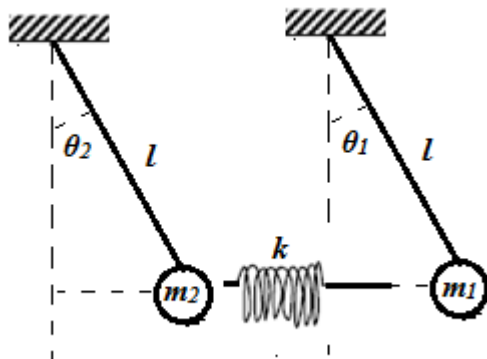
**A) Couplage élastique**

**B) Couplage visqueux**



**C) Couplage élastique**

**D) Couplage inertiel**



**Figure IV.1** Exemples des systèmes à 2DDL

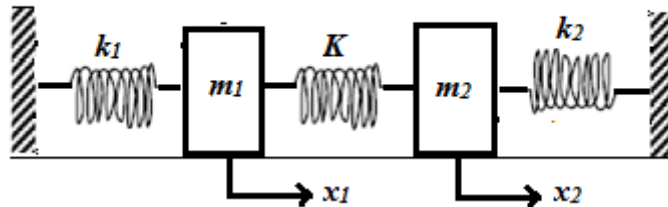


En générale, les systèmes à 02 DDL sont obtenus par **Couplage** de deux systèmes à 1 DDL

- Dans le cas où le couplage est assuré par un **ressort** (Système (a) et (c)) le couplage est dit : **Élastique**
- Dans le cas où il est assuré par un **amortisseur** (système (b)) le couplage est dit : **Visqueux**
- Dans le cas où il est assuré par une **masse**, (le système (d)) le couplage est dit : **Inertiel**

## IV.2 Étude d'un système (masses-ressorts) à 02 DDL

Considérons le système composé de masse  $m_1$  et  $m_2$  attaché à des ressorts  $k_1$  et  $k_2$ , couplé par un ressort de constante de raideur  $K$



**Figure IV.2** Exemples d'un système masses-ressorts à 2DDL

Les équations de Lagrange dans ce cas s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

### IV.2.1 Équation différentielle du mouvement (EDM)

Calculons Le Lagrangien du système :  $L = T - U$

$$T = T_{m_{1r}} + T_{m_{2r}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = U_{k_1} + U_K + U_{k_2} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}(k_1 + K)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_2 + K)x_2^2 - Kx_1x_2$$

$$L = \frac{1}{2}m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}(k_1 + K)x_1^2 - \frac{1}{2}(k_2 + K)x_2^2 + Kx_1x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m_1 \dot{x}_1 \right] = m_1 \ddot{x}_1$$

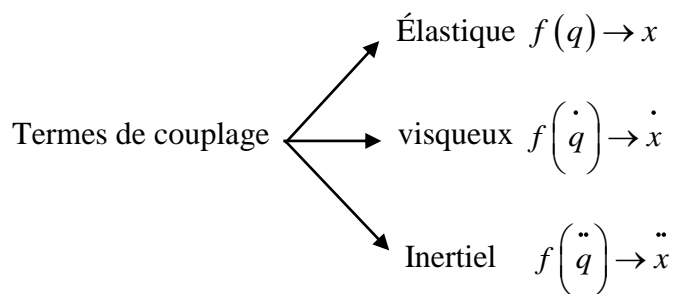
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -(k_1 + K)x_1 + Kx_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ m_2 \dot{x}_2 \right] = m_2 \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -(k_2 + K)x_2 + Kx_1$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Les termes  $-k_1x_1$  ;  $-k_2x_2$  sont appelés : **Termes de Couplage**



### IV.2.2 Résolution de L'EDM

Les deux solutions des 02 EDM ;  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont harmonique de pulsation et Amplitudes différentes, elles s'écrivent :

$$x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi)$$

On substitue  $x_1$  et  $x_2$  dans l'EDM on aura :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + K)x_1 - Kx_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_2 + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A_1 m_1 \omega^2 + A_1 (k_1 + K) - KA_2 = 0 \\ -A_2 m_2 \omega^2 + A_2 (k_2 + K) - KA_1 = 0 \end{cases}$$

Sachant que :

$$\ddot{x}_1(t) = -A_1 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x}_2(t) = -A_2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\begin{cases} (k_1 + K - m_1 \omega^2) A_1 - KA_2 = 0 \\ -KA_1 + (k_2 + K - m_2 \omega^2) A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} (k_1 + K - m_1 \omega^2) & -K \\ -K & (k_2 + K - m_2 \omega^2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$A_1 \neq 0 \text{ et } A_2 \neq 0 \Rightarrow \Delta(\omega) = 0$$

$$\Delta(\omega) = [(k_1 + K - m_1 \omega^2)(k_2 + K - m_2 \omega^2)] - K^2 = 0$$

$\Delta(\omega)$  : Déterminant de la matrice ; cette équation est Quadratique, admet 02 solution réelles

$\omega_1$  et  $\omega_2$  appelées **les pulsations propres du système**.

$$02DDL(q_1, q_2) \rightarrow 02 \text{ pulsation } (\omega_1, \omega_2)$$

### IV.2.3 Cas particulier [ $m_1 = m_2 = m$ ; $k_1 = k_2 = k$ ]

$$\Delta(\omega) = [(k + K - m\omega^2)]^2 - K^2 = 0$$

$$\begin{cases} k + K - m\omega^2 = K \\ k + K - m\omega^2 = -K \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$$

$$\Rightarrow \omega_1 < \omega_2 \Rightarrow T_1 > T_2 \quad : \quad \text{Pulsation propres}$$

$\omega_1$  et  $\omega_2$  Sont appelés **pulsations propres** du système

$\Rightarrow$  Les solutions particulières :

- **1<sup>er</sup> mode de vibration : Mode fondamentale** : ( $\omega = \omega_1$ )

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

- **2<sup>ème</sup> Mode : Mode Harmoniques :** ( $\omega = \omega_2$ )

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

⇒ La solution générale est la combinaison linéaire des deux solutions particulières :

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

Le double indice :  $A_{11}$  : Le 1<sup>er</sup> : la coordonnée et le 2<sup>ème</sup> : la pulsation

### IV.2.4 Étude des modes propres

- **1<sup>er</sup> mode propre :**  $\omega = \omega_1$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2(t) = A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{cases}$$

Remplaçons dans l'EDM :

$$\begin{cases} (k + K - m\omega_1^2)A_{11} - KA_{21} = 0 \\ -KA_{11} + (k + K - m\omega_1^2)A_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m}$$

$$\begin{cases} KA_{11} - KA_{21} = 0 \\ -KA_{11} + KA_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{11} = A_{21}$$

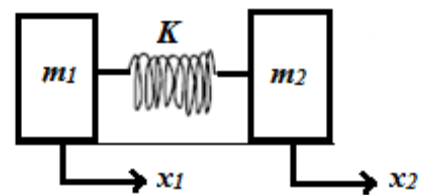


Figure IV.3 Masses en phase

Dans le 1<sup>er</sup> mode, les masses oscillent avec la même amplitude en phase  $\rightarrow \frac{A_{11}}{A_{21}} = \mu_1 = +1$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ x_2(t) &= A_{21} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{aligned}$$

- **2<sup>ème</sup> mode de vibration :**  $\omega = \omega_2$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) &= A_{22} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

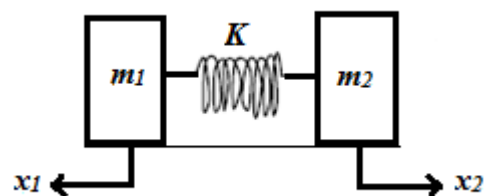


Figure IV.4 Masse en opposition de phase

Remplaçons dans les EDM :

$$\begin{cases} (k + K - m\omega_2^2)A_{12} - KA_{22} = 0 \\ -KA_{12} + (k + K - m\omega_2^2)A_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$$

$$\begin{cases} \left( k + K - m \left( \frac{k + 2K}{m} \right) \right) A_{12} - KA_{22} = 0 \\ -KA_{21} + \left( k + K - m \left( \frac{k + 2K}{m} \right) \right) A_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -KA_{12} - KA_{22} = 0 \\ -KA_{21} - KA_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_{12} = -A_{22} \rightarrow \text{Le rapport } \mu_2 = \frac{A_{22}}{A_{21}} = -1$$

Dans ce mode (2<sup>ème</sup>) les masses oscillent avec la même amplitude mais en opposition de phase

$$x_1(t) = A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = -A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

La solution générale s'écrit :

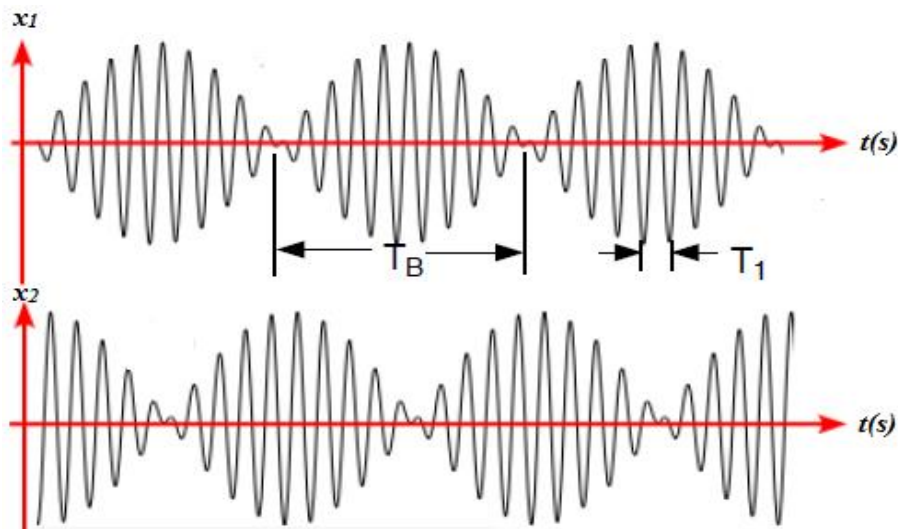
$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = \mu_1 A_{11} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \mu_2 A_{12} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases}$$

**Mode 01 :**  $\mu_1 > 0 \rightarrow$  Oscillation en phase

**Mode 02 :**  $\mu_2 < 0 \rightarrow$  Oscillation en opposition de phase

#### IV.2.5 Phénomène de battement



**Figure IV.5.** Réponse du système dans le cas de battement d'après [Djelouah, 2012]

Lorsque le couplage est faible ( $K \ll k$ ), les pulsations propres ( $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) seront voisines ( $\omega_1 \cong \omega_2$ ) dans ce cas il se produit le phénomène de Battement

### IV.3 Application (Pendules couplés)

Déterminer les équations différentielles du système ci-dessous, composé de deux pendules simples de masse  $m_1$  et  $m_2$  et de mêmes longueurs  $l$ , couplés par un ressort qui effectue des oscillations de faible amplitude repérées par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . (Voir la figure).

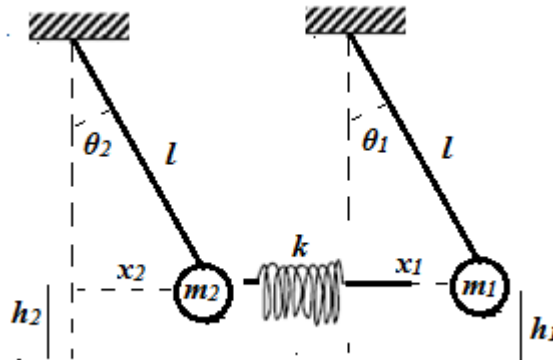


Figure IV.6 Pendules couplés par un ressort

- **Calcul des EDM**

02 coordonnées  $(\theta_1, \theta_2) \rightarrow 2DDL$

02 Équation Lagrangien : Système Libre non Amortis

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

- **Calcul du Lagrangien :  $L = T - U$**

$$T = T_{m_{1rot}} + T_{m_{2rot}} = \frac{1}{2} I_{0_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_{0_1} \dot{\theta}_2^2$$

$$\begin{cases} I_{0_1} = m_1 l^2 \\ I_{0_2} = m_2 l^2 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U_{m_1} + U_{m_2} + U_K = m_1 g h_1 + m_2 g h_2 + K(x_1 - x_2)^2$$

$$\begin{cases} h_1 = l - l \cos \theta_1 \approx l \frac{\theta_1^2}{2} \\ h_2 = l - l \cos \theta_2 \approx l \frac{\theta_2^2}{2} \\ x_1 = l \sin \theta_1 \approx l \theta_1 \\ x_2 = l \sin \theta_2 \approx l \theta_2 \end{cases}$$

$$U = \frac{1}{2} m_1 g l \theta_1^2 + \frac{1}{2} m_2 g l \theta_2^2 + \frac{1}{2} K (l \theta_1 - l \theta_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} m_1 g l \theta_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l \theta_2^2 - \frac{1}{2} K l^2 \theta_1^2 - \frac{1}{2} K l^2 \theta_2^2 + K l^2 \theta_1 \theta_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right] = m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_1 g l \theta_1 - K l^2 \theta_1 + K l^2 \theta_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right] = m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 g l \theta_2 - K l^2 \theta_2 + K l^2 \theta_1$$

$-K l^2 \theta_2$ ; et  $-K l^2 \theta_1 \rightarrow$  Termes de couplage

- **Les solutions des EDM :**

$$\theta_1(t) = \theta_1 \cos(\omega t + \phi)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2 \cos(\omega t + \phi)$$

- **Calcul des pulsations propres :**  $[m_1 = m_2 = m]$

On remplace  $\theta_1$  et  $\theta_2 \rightarrow$  dans les EDM

Avec :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1(t) &= -\omega^2 \theta_1 \cos(\omega t + \phi) \\ \ddot{\theta}_2(t) &= -\omega^2 \theta_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -m \omega^2 l^2 \theta_1 + (m g l + K l^2) \theta_1 - K l^2 \theta_2 = 0 \\ -m \omega^2 l^2 \theta_2 + (m g l + K l^2) \theta_2 - K l^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m g l + K l^2 - m \omega^2 l^2) \theta_1 - K l^2 \theta_2 = 0 \\ (m g l + K l^2 - m \omega^2 l^2) \theta_2 - K l^2 \theta_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} (mgl + Kl^2 - m\omega^2 l^2) & -Kl^2 \\ -Kl^2 & (mgl + Kl^2 - m\omega^2 l^2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta(\omega) = 0 \Rightarrow [(mgl + Kl^2 - m\omega^2 l^2)] - (Kl^2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} mgl + Kl^2 - m\omega^2 l^2 = Kl^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \\ mgl + Kl^2 - m\omega^2 l^2 = -Kl^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{2k}{m} \end{cases}$$

$$\omega_1 < \omega_2 \Rightarrow \bar{\omega}_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{et} \quad \bar{\omega}_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2K}{m}}$$

#### IV.4 Exercices sur les systèmes à 2DDL

##### Exercice IV.1

Soit le système libre ci-dessous, les deux variables indépendantes sont  $x_1$  et  $x_2$ . Le couplage est assuré par l'amortisseur de constante  $\alpha$ .

1. Déterminer l'énergie potentielle, cinétique et de dissipation du système
2. Établir les équations différentielles du mouvement
3. Évaluer le déplacement des deux masses en mode fondamentale

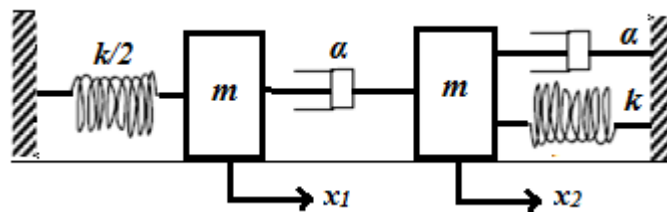


Figure IV.7 Schéma représentatif pour l'exercice IV.1

##### Exercice IV.2

Dans le cas de faibles amplitudes, soit le système libre composé d'un pendule couplé à une masse  $2m$  par un ressort de raideur  $k$ . Les deux variables indépendantes sont  $x(t)$  et  $\theta(t)$ .

1. Déterminer le Lagrangien du système ;
2. Établir les équations différentielles du mouvement ;
3. Donner la solution des EDM du régime permanent.



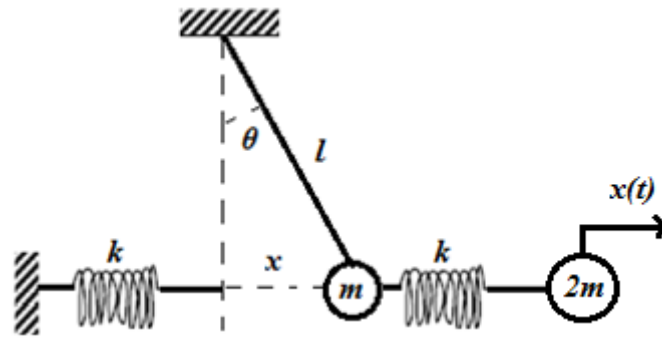


Figure IV.8 Schéma représentatif pour l'exercice IV.2

### Exercice IV.3

Évaluer les équations différentielles de la masse qui effectue un double mouvement de rotation et translation, sachant que le système est composé de : masse-ressort-amortisseur

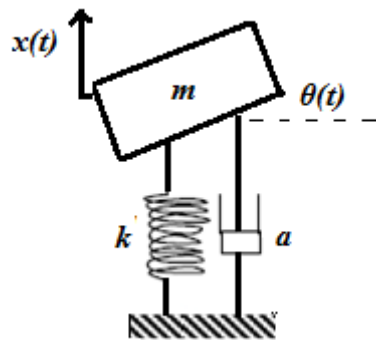


Figure IV.9 Schéma représentatif pour l'exercice IV.3

## *Chapitre V*

# *Oscillations forcées des systèmes à 2DDL*

### V.1. Introduction

Les systèmes régis par deux coordonnées généralisées ( $q_1$  et  $q_2$ ), soumis à des forces excitatrices ( $f_{q_1}(t)$  et  $f_{q_2}(t)$ ) sont appelés, oscillateurs forcés à 2DDL. Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = f_{q_1}(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = f_{q_2}(t) \end{cases}$$

Dans le cas où la coordonnée est une rotation ( $q = \theta$ ) la force  $f_q(t)$  est remplacée par le moment de cette force  $M_{(f_{q_1}(t))}$ .

### V.2. Les EDM d'un système forcé à 2DDL

Soit le système à 2DDL ( $x_1, x_2$ ) de la figure V.1, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure  $f_1(t) = F(t) = F_0 \cos \Omega t$ .  $K$  : ressort de couplage.

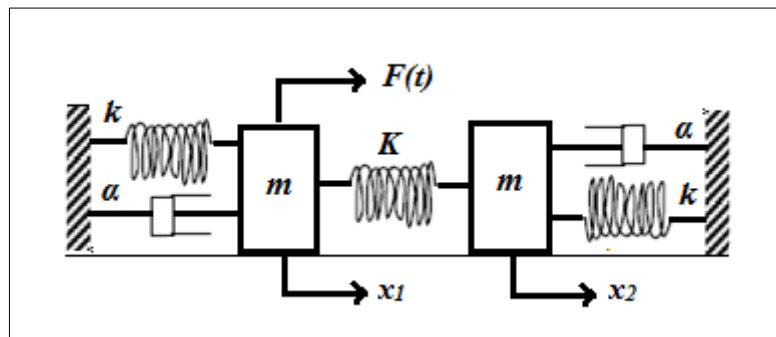


Figure V.1 Système à deux DDL couplé par un ressort de couplage

Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = F(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

L'énergie cinétique :  $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2)^2$

L'énergie potentielle :  $U = \frac{1}{2} k(x_1)^2 + \frac{1}{2} k(x_2)^2 + \frac{1}{2} K(x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \alpha (\dot{x}_2)^2$

L'application des équations de Lagrange conduit vers les équations différentielles du mouvement (EDM) suivantes :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + (k + K)x_1 + \alpha \dot{x}_1 - Kx_2 = F(t) \\ m \ddot{x}_2 + (k + K)x_2 + \alpha \dot{x}_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

### V.3. Résolution des EDM

En régime permanent, la solution des équations différentielles du mouvement est de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) \simeq x_{1p}(t) = \chi_1 \cos(\Omega t + \phi_1) \\ x_2(t) \simeq x_{2p}(t) = \chi_2 \cos(\Omega t + \phi_2) \end{cases}$$

En écriture complexe :

$$x_1(t) = \chi_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{\chi_1} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \overline{\chi_1} e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = \chi_2 e^{j(\Omega t + \phi_2)} = \overline{\chi_2} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \overline{\chi_2} e^{j\Omega t}$$

#### V.3.1. Calcul de $\chi_1$ et $\chi_2$ dans le cas de faible amortissement

Dans le cas de faible amortissement ( $\alpha = 0$ ), les EDM s'écrivent :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + (k + K)x_1 - Kx_2 = F(t) \\ m \ddot{x}_2 + (k + K)x_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

On obtient alors le même système que le chapitre IV précédant, avec :  $\varpi_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  et

$$\varpi_2 = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$$

Utilisons l'écriture complexe avec :  $F(t) = F_0 \cos \Omega t = F_0 e^{j\Omega t}$

$$\begin{cases} (-m\Omega^2 \overline{\chi_1} + (k + K)\overline{\chi_1} - K\overline{\chi_2})e^{i\Omega t} = F_0 e^{j\Omega t} \\ (-m\Omega^2 \overline{\chi_2} + (k + K)\overline{\chi_2} - K\overline{\chi_1})e^{i\Omega t} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ (k + K) - m\Omega^2 \right] \overline{\chi_1} - K\overline{\chi_2} = F_0 \\ \left[ (k + K) - m\Omega^2 \right] \overline{\chi_2} - K\overline{\chi_1} = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système à deux équations conduit vers :

$$\overline{\chi_1} = \frac{F_0}{m} \frac{\frac{k + K}{m} - \frac{m\Omega^2}{m}}{\left[ \frac{k + 2K}{m} - \frac{m\Omega^2}{m} \right] \left[ \frac{k}{m} - \frac{m\Omega^2}{m} \right]}$$

À partir du chapitre précédant :  $\omega_1^2 = \frac{K}{m}$  et  $\omega_2^2 = \frac{k + 2K}{m}$  et on pose :  $\omega_a^2 = \frac{k + K}{m}$

$$\overline{\chi_1} = \frac{F_0}{m} \frac{(\omega_a^2 - \Omega^2)}{\left[ \omega_2^2 - \Omega^2 \right] \left[ \omega_1^2 - \Omega^2 \right]}$$

À partir de  $\overline{\chi_1} \Rightarrow \overline{\chi_2} = \frac{F_0}{m} \frac{K}{m \left[ \omega_2^2 - \Omega^2 \right] \left[ \omega_1^2 - \Omega^2 \right]}$

$\overline{\chi_1} = \chi_1 e^{j\phi_1}$  et  $\overline{\chi_2} = \chi_2 e^{j\phi_2} \Rightarrow \phi_1$  et  $\phi_2$  peuvent avoir que des valeurs  $0$  et/ou  $\pi$ , vu que la partie imaginaire de  $\overline{\chi_1}$  et  $\overline{\chi_2}$  est nulle. Sachant que :  $\chi_1 = |\overline{\chi_1}|$  et

$\phi_1 = -\arctg \frac{\text{Im}(\overline{\chi_1})}{\text{Re}(\overline{\chi_1})}$ , on aura au final :

$$\chi_1 = \frac{F_0}{m} \frac{|\omega_a^2 - \Omega^2|}{|\omega_2^2 - \Omega^2| |\omega_1^2 - \Omega^2|} \quad \text{et} \quad \chi_2 = \frac{F_0 K}{m^2} \frac{1}{|\omega_2^2 - \Omega^2| |\omega_1^2 - \Omega^2|}$$

### V.3.2 Étude de la variation de $\chi_1$ et $\chi_2$

On remarque que  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont en fonction de la pulsation de la force excitatrice  $\Omega$  :

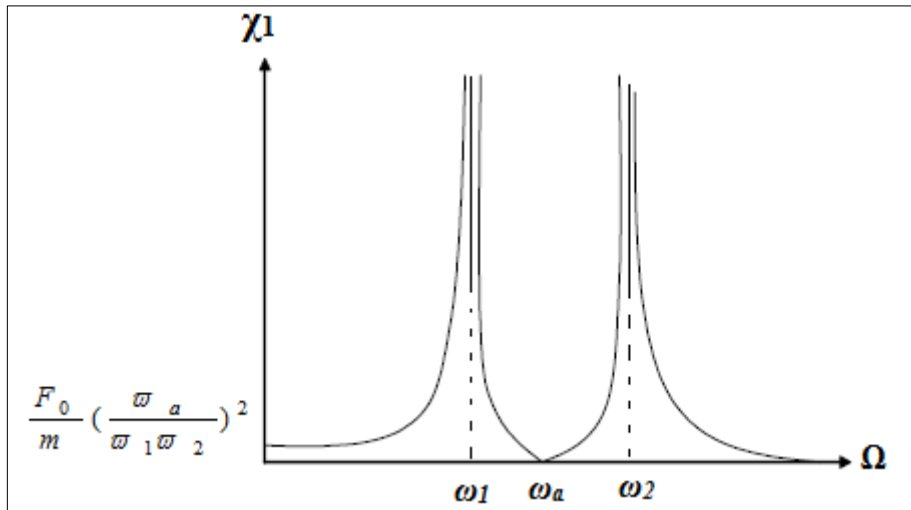
- $\Omega = 0$  :  $\chi_1 = \frac{F_0}{m} \left( \frac{\omega_a}{\omega_1 \omega_2} \right)^2$  et  $\chi_2 = \frac{F_0 K}{(m \omega_1 \omega_2)^2}$

- Lorsque  $\Omega = \omega_1$  et  $\Omega = \omega_2 \Rightarrow$  Les amplitudes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  passent par leur maximum

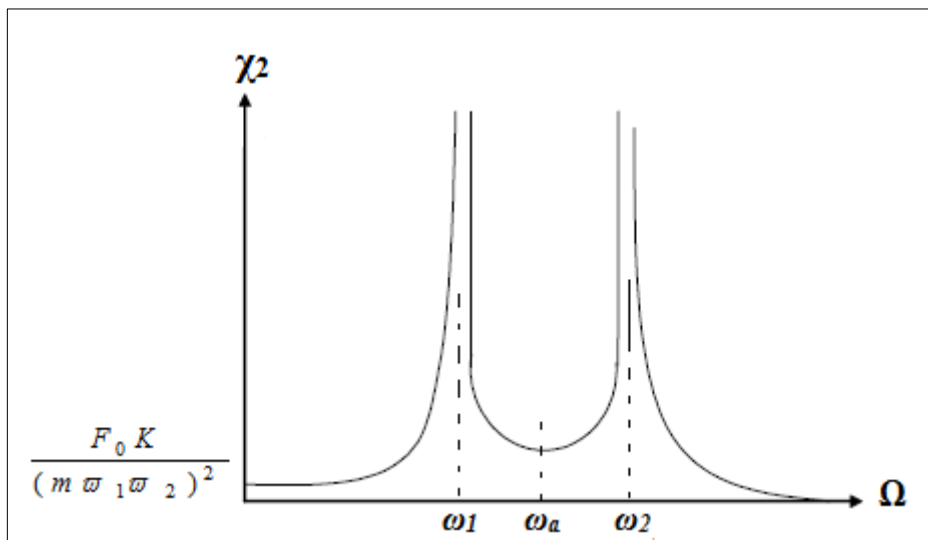
$\Rightarrow$  **Résonance**

- Lorsque  $\Omega = \omega_a \Rightarrow$  Les amplitudes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont minimales  $\Rightarrow \omega_a$  : est appelée **Pulsation d'antirésonance**

La variation des amplitudes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont en fonction de la pulsation de la force excitatrice  $\Omega$  est illustrée sur les figures V.2 et V.3



**Figure V.2** Évolution de l'amplitude  $\chi_1$  en fonction de  $\Omega$



**Figure V.3** Évolution de l'amplitude  $\chi_2$  en fonction de  $\Omega$

#### V.4 Généralisation sur des systèmes à nDDL

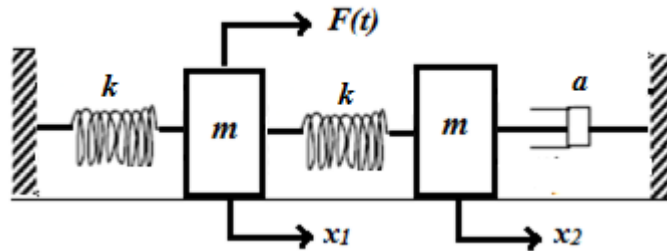
Dans le cas général d'un système forcé à **nDDL**, il y'aura autant d'équation de Lagrange, donc **n** équations de Lagrange.

Système à **nDDL**  $\Rightarrow$  Coordonnées  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Dans ce cas les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = F_{q_i}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

**Application :** Le système mécanique ci-dessous, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure  $F(t) = kA \cos \Omega t$ .

1. Écrire les EDM du système et trouver la réponse en régime permanent ?
2. Si  $\alpha = 0$ , pour quelle valeur de  $\omega$  le système entre en résonance. Donner dans ce cas la condition pour que la masse excitée reste immobile ?



**Solution :** Les équations de Lagrange s'écrivent dans ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = F(t) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \end{cases}$$

### 1. Les équations différentielles

L'énergie cinétique :  $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_2)^2$

L'énergie potentielle :  $U = \frac{1}{2} k (x_1)^2 + \frac{1}{2} K (x_1 - x_2)^2$

L'énergie de dissipation :  $D = \frac{1}{2} \alpha (\dot{x}_2)^2$

L'application des équations de Lagrange conduit vers les équations différentielles du mouvement (EDM) suivantes :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + kx_1 + k(x_1 - x_2) = F(t) \\ m \ddot{x}_2 - k(x_1 - x_2) + \alpha \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m} x_1 + \frac{k}{m} x_2 = \frac{F(t)}{m} \\ \ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 - \frac{k}{m} x_1 + \frac{\alpha}{m} \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

La résolution en régime permanent, en écriture complexe :

$$x_1(t) = \chi_1 e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \overline{\chi_1} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_1(t) = -\Omega^2 \overline{\chi_1} e^{j\Omega t}$$

$$x_2(t) = \chi_2 e^{j(\Omega t + \phi_2)} = \overline{\chi_2} e^{j\Omega t} \Rightarrow \ddot{x}_2(t) = -\Omega^2 \overline{\chi_2} e^{j\Omega t}$$

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\chi_1} \\ \overline{\chi_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k\alpha}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\Omega) = \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2}$$

$$\chi_1 = \frac{1}{\det} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m}\right) \text{ et } \chi_2 = \frac{1}{\det} \frac{k^2}{m^2} \alpha$$

## 2. Résolution des EDM Pulsations pour $\alpha = 0$

$$\det(\Omega) = \left(-\Omega^2 + \frac{2k}{m}\right)\left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) - \frac{k^2}{m^2} = 0 \Rightarrow \Omega^4 - \frac{3k}{m}\Omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

L'équation admet deux solutions :  $\omega_1 = \frac{k}{2m}(3 - \sqrt{5})$  et  $\omega_2 = \frac{k}{2m}(3 + \sqrt{5})$

Pour que la masse soit immobile :  $\chi_1 = \frac{1}{\det} \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m} + j\Omega \frac{\alpha}{m}\right) = 0$ , pour

$$\alpha = 0 \Rightarrow \left(-\Omega^2 + \frac{k}{m}\right) = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

## V.5 Exercices sur les systèmes forcés à 2DDL

### Exercice V.1

Le système ci-contre composé de deux pendules simples de masse  $m_1$  et  $m_2$  et de longueurs respectives  $L$  et  $2L$ , couplés par un ressort qui effectuent des oscillations de faible amplitude repérées par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . (Voir la figure).

1. Trouver l'énergie potentielle et cinétique du système ?

2. Déterminer les équations différentielles, avec  $F(t) = F_0 \sin \Omega t$  ?

3. Déterminer les amplitudes des deux masses ?

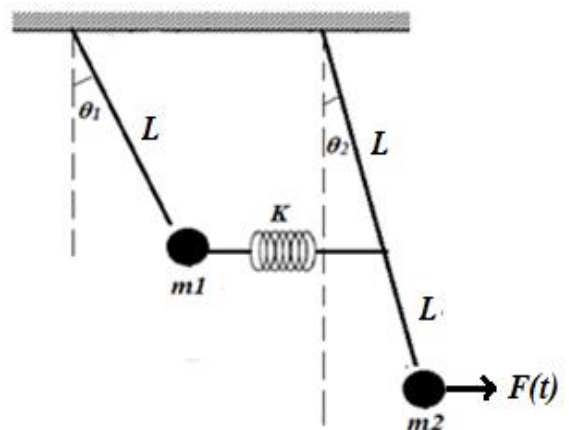


Figure V.4 Schéma représentatif pour l'exercice V.1



## Exercice V.2

Le système mécanique ci-dessous, composé de : masses, ressorts et amortisseurs, dont leurs caractéristiques sont montrées sur la figure. Ce système est soumis à une force extérieure  $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ .

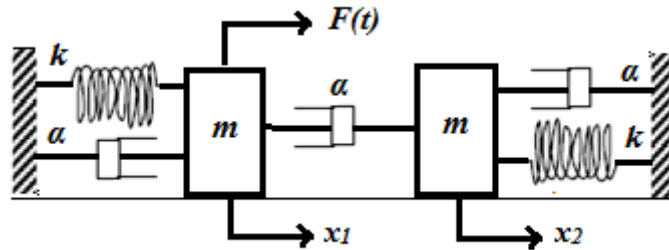


Figure V.5 Schéma représentatif pour l'exercice V.2

Déterminer la position de chaque masse à l'instant  $t = 2s$  ?

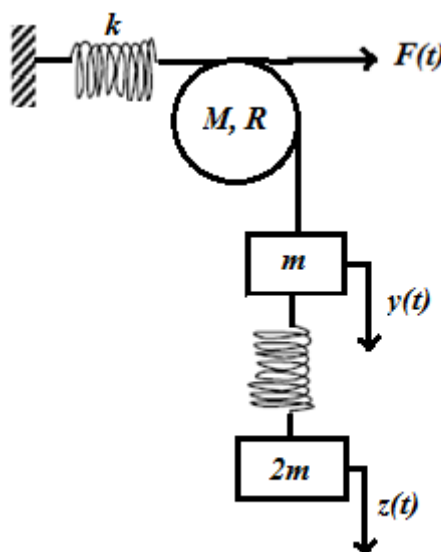
**Données :**  $m = 2 \text{ kg}$  ;  $\alpha = 1 \text{ Ns/m}$  ;  $k = 10 \text{ N/m}$  ;  $L = 1 \text{ m}$  ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$  ;  $F_0 = 1 \text{ kN}$  et  $\Omega = 2\pi \text{ rad/s}$

## Exercice V.3

Le fil autour du disque auquel sont suspendues les masses est inextensible et non glissant. Les oscillations sont repérées par les translations  $y$  et  $z$ .

1. Déterminer la pulsation d'antirésonance de ce système.
2. Évaluer le rapport des amplitudes

**Données :**  $m = 3 \text{ kg}$  ;  $M = 5 \text{ kg}$  ;  $k = 10 \text{ N/m}$  ;  $R = 50 \text{ cm}$



**Figure V.6** Schéma représentatif pour l'exercice V.3

## *Chapitre VI*

### *Phénomène de propagation des ondes*

## VI.1 Introduction

Les exemples de phénomènes de propagation sont multiples : propagation de la lumière, d'ondes électromagnétiques, du son ou de la chaleur sans que ces phénomènes soient de même nature. Les ondes électromagnétiques se propagent dans le vide, se réfléchissent, s'absorbent et se transmettent au niveau d'un milieu matériel. Quant aux ondes mécaniques et acoustiques, elles ont besoin d'un milieu matériel pour se propager. En effet, dans ce chapitre nous allons s'intéresser à la résolution de l'équation de propagation d'Alembert à seule dimension.

## VI.2 Définition et types d'ondes

En physique, une onde peut se définir comme la **propagation d'une perturbation**. Il s'agit donc d'un phénomène qui fait intervenir à la fois l'espace et le temps. Il existe différents types d'ondes, à savoir :

- Ondes mécaniques ;
- Ondes électromagnétiques ;
- Ondes de chaleur ;
- Ondes de matière.

Les ondes mécaniques et les ondes de chaleur se propagent dans un milieu matériel solide, liquide ou gazeux. Les ondes électromagnétiques et les ondes de matière peuvent se propager dans un milieu matériel, mais aussi dans le vide. Chaque type d'onde est caractérisé par la nature physique de la grandeur perturbée. Lorsque cette grandeur est vectorielle, il y a lieu de distinguer deux modes de propagation :

- Les **ondes transversales** : la grandeur perturbée varie dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation ;
- Les **ondes longitudinales** : la grandeur perturbée varie selon la direction de propagation

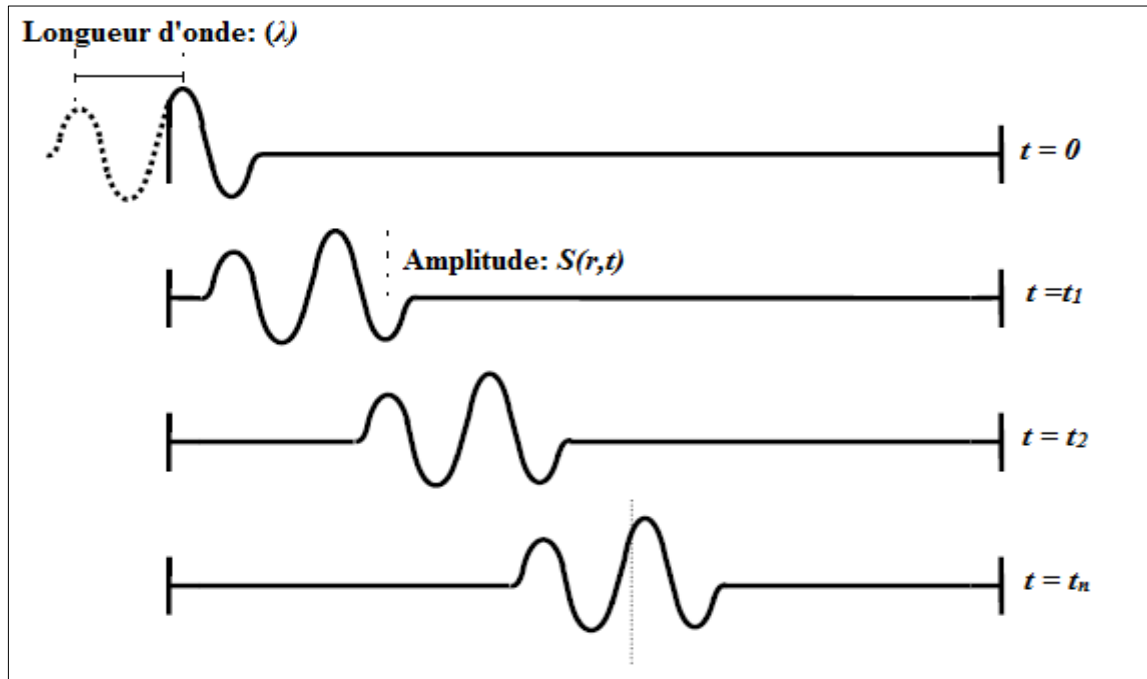
Une onde est caractérisée par sa **fréquence**, sa **longueur d'onde** et son **amplitude**  $S(\mathbf{r}, t)$ ; définie en tout point de l'espace-temps avec les trois coordonnées d'espace et celle du temps.

### Exemples :

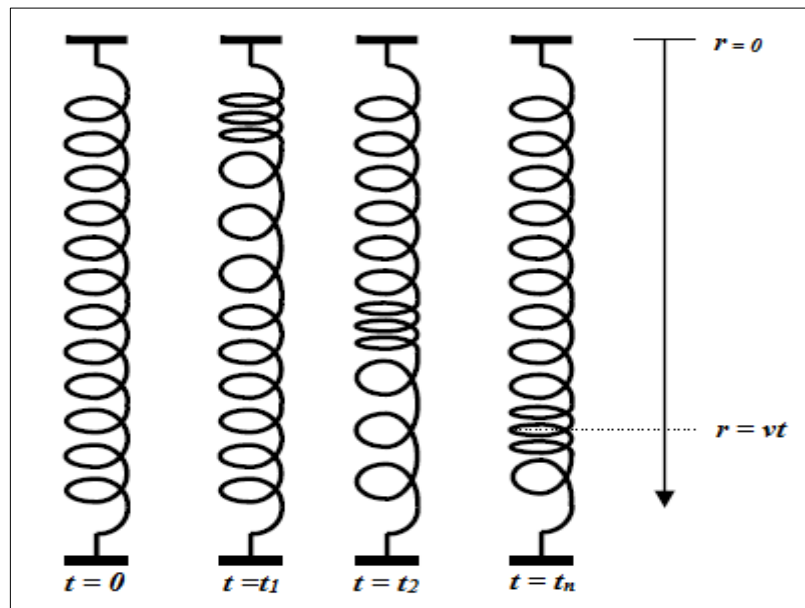
**Ondes mécanique à une dimension** : Vagues sur l'eau ;

**Ondes mécanique à deux dimensions** : Chute d'une goutte d'eau en un point de surface d'eau ;

**Ondes mécanique à trois dimensions** : Ondes sonores.



**Figure VI.1** Onde transversale se propageant le long d'une corde



**Figure IV.2** Onde longitudinale se propageant le long d'un ressort

### IV.3 Équation de propagation d'Alembert)

Les phénomènes qui seront étudiés sont décrits par la fonction ( $S$ ) qui dépend à la fois du temps et d'une variable d'espace ( $r$ ).

En 1747, le physicien français Jean le Rond d'Alembert obtient une équation différentielle, l'équation d'onde (ou équation de d'Alembert) dont la solution est une fonction d'onde (onde voyageant dans un milieu à vitesse  $V$ ). Dans le cas d'une corde tendue parfaitement élastique

oscillant avec des petites oscillations verticales, cette équation est déterminée à partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton appliquée sur chaque élément de corde ( $r$ ) dans le temps ( $t$ ).

Prenons le cas d'une corde tendue initialement au repos et dont on agite l'un des points d'attache (Voir figure VI.3). Pour déterminer la forme de la perturbation, nous prenons une photo à l'instant  $t$  et nous mesurons le *déplacement* de quelques points de la corde

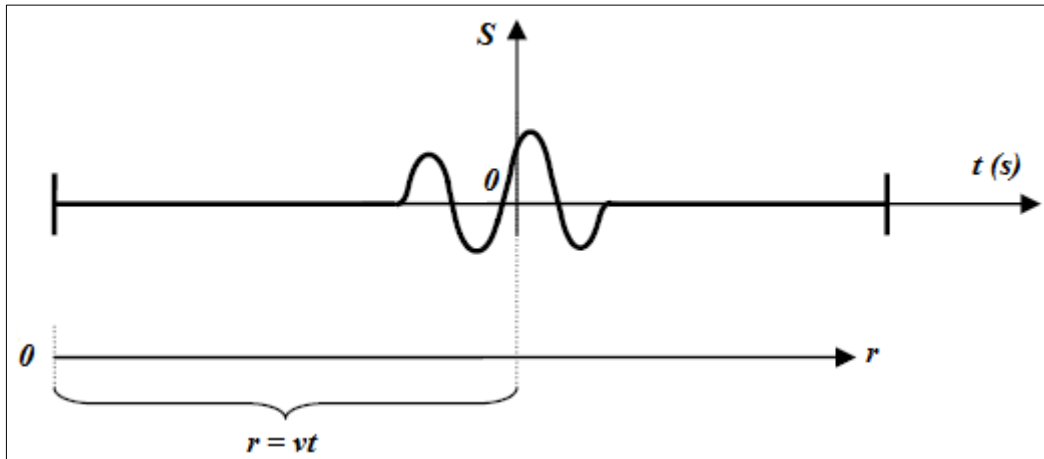


Figure IV.3 Onde Forme du déplacement à l'instant  $t$ , ( $r$ ,)

La forme du déplacement, c'est-à-dire la fonction  $S(r)$  dépend évidemment de la façon dont on agite la corde. En première approximation, on constate que la vitesse de propagation ( $V$ ) ne dépend pas de sa forme. La forme du déplacement reste la même au cours du temps.

Mathématiquement, deux équations aux dérivées partielles rendent compte de ce type de phénomènes :

- $\Delta S = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$  dite **équation hyperbolique** ou de **D'Alembert**
- $\Delta S - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial S}{\partial t}$  dite **équation parabolique**. Cette équation est plus souvent appelée équation de diffusion: elle régit la conduction de la chaleur, la diffusion de matière.

Dans le présent chapitre nous se limitons nos propos à l'équation de propagation hyperbolique à

une dimension : 
$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation représente, sur le plan mathématique, la propagation sans déformation d'une quantité ( $S$ ) appelée **onde**. L'onde ( $S$ ) peut être scalaire ou vectorielle, dans ce dernier cas on est

conduit à trois relations scalaires. Elle peut avoir un caractère longitudinal (de même "sens" que l'axe  $x$ ) ou transversal (perpendiculaire à l'axe  $x$ ).

Il apparaît deux déplacements, l'un (celui de la matière) à vitesse faible, l'autre (celui des rides) à vitesse importante que l'on nommera **vitesse  $V$  de l'onde**.

L'onde sonore est un exemple d'**onde longitudinale**, c'est à dire où les déplacements de matière autour d'une position d'équilibre ont lieu dans la même direction que le déplacement de l'onde.

#### IV.4 Solution de l'équation de propagation

Pour résoudre l'équation de propagation des ondes à une dimension, opérons le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x = t - \frac{r}{v} \\ y = t + \frac{r}{v} \end{cases}$$

Donc ce qui suit, essayons de développer d'une manière explicite les termes de l'équation de

propagation à savoir :  $\frac{\partial S}{\partial t}$  et  $\frac{\partial S}{\partial r}$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right) = \frac{\partial S}{\partial t} \left( \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial S}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{1}{V} \text{ et } \frac{\partial y}{\partial r} = +\frac{1}{V}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} = \frac{1}{V^2} \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

À partir de cette équation, on peut conclure que :  $\frac{\partial S}{\partial x}$  ne dépend que de  $x$  (pas de  $y$ ), et  $\frac{\partial S}{\partial y}$  ne dépend que de  $y$  (pas de  $x$ )  $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial x} = f'(x) \\ \frac{\partial S}{\partial y} = \varphi'(y) \end{cases}$$

Donc la solution est une **superposition** d'ondes progressives et rétrogrades

$$S(r, t) = f(x) + \varphi(y) = f\left(t - \frac{r}{V}\right) + \varphi\left(t + \frac{r}{V}\right)$$

### VI.5 Les ondes progressives périodiques sinusoïdales

Une onde progressive correspond à la propagation *dans l'espace et au cours du temps* d'une perturbation. Une onde progressive est dite périodique si la perturbation qui la caractérise se répète à intervalles de temps réguliers, appelés périodes et notés ( $T$ ). Une onde ne peut être périodique que si sa source est elle-même périodique. Comme tous les phénomènes périodiques, une telle onde est aussi caractérisée par sa fréquence ( $f$ ) qui caractérise la périodicité temporelle de l'onde.

#### IV.5.1 Dimension de propagation

Les ondes progressives périodiques peuvent se propager dans différentes direction de l'espace :

- Les ondes **transversales** se "déplacent" **perpendiculairement** par rapport à la direction de propagation. C'est le cas pour un goutte à goutte régulier à la surface de l'eau.
- Les ondes **longitudinales** se "déplacent" dans la **même direction** que celle de propagation. C'est le cas pour les ondes sonores et lumineuses.

Une onde progressive est dite sinusoïdale si les variations de la perturbation se font en suivant la fonction mathématique sinus.

#### IV.5.2 La longueur d'onde d'une onde progressive périodique

La longueur d'onde peut être représentée comme la distance séparant deux maximums (voir la figure VI.4 ; à cet instant  $t$ , chaque molécule séparée de la longueur d'onde est soumise à une pression et une vitesse acoustiques identiques.

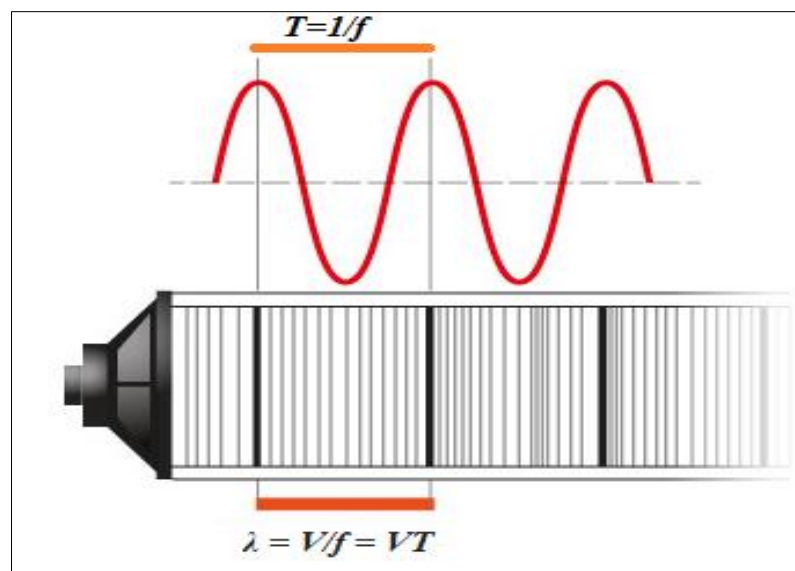
Dans un milieu donné, la fréquence et la longueur d'onde sont liées par la formule suivante :



$$\lambda = \frac{V}{f} = VT$$

- $\lambda$  : La longueur d'onde en mètre (m) ;
- $V$  : La célérité de propagation de l'onde en mètre par seconde ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) ;
- $F$  : La fréquence (Hz) ;
- $T$  : la période (s).

Plus la longueur d'onde est grande, plus la fréquence est faible. A l'inverse, plus elle est faible, plus la fréquence est élevée



**Figure IV.4** Onde Forme du déplacement à l'instant  $(t, \mathbf{r})$  [Perrenoud, 2010]

### IV.5.3 Célérité d'une onde progressive sinusoïdale

La célérité d'une onde progressive sinusoïdale est fonction des périodicités temporelle et spatiale. Elle correspond au temps nécessaire à un point pour parcourir la distance entre deux surfaces d'onde identiques. Il est prépondérant de distinguer la célérité de la vitesse, car il n'y a pas nécessairement de déplacement de matière dans le cas de l'onde progressive. La vitesse est plutôt utilisée dans le cas de déplacement d'un mobile par exemple.

La célérité d'une onde périodique sinusoïdale est constante dans le temps dans un milieu donné. Elle ne dépend pas de l'amplitude de l'onde. Par contre, elle est très dépendante du milieu de propagation et de la et de la densité donc du matériau qui le constitue.

#### IV.5.4 Expression mathématique de l'onde sinusoïdale

Une onde périodique sinusoïdale est décrite suivant une loi mathématique : la fonction sinus. Cette propriété permet de pouvoir connaître les caractéristiques de l'onde au cours du temps et en fonction de l'espace. Si l'on étudie le mouvement sinusoïdale d'une onde à une dimension dans un repère orthogonale ( $x ; y$ ) de centre O, la position en ordonnée de chaque point en fonction du temps est donné par la relation mathématique suivante :

$$y(x, t) = A \sin(k(xVt) + \phi)$$

- A, l'amplitude de l'onde sinusoïdale en mètres ;
- k, le nombre d'onde, qui est une constante caractéristique de l'onde dépendant de sa longueur d'onde (rad/m),
- V, la célérité de l'onde m/s,
- $\phi$ , la constante de phase en (rad). Elle correspond à la position de l'onde quand x et t sont nuls, soit au départ du mouvement. Si possible, dans un repère bien choisi, le centre du repère est placé au démarrage de l'onde et donc  $\phi$  est nul.

Deux ondes sinusoïdales peuvent être strictement identiques mais en décalage de phase. Elles seront caractérisées par la même fonction d'onde sinusoïdale à  $\phi$  près. Si deux ondes parcourent le même milieu simultanément, les amplitudes de deux ondes sonores de même nature se superposent, ainsi :

- Deux ondes identiques et de même nature non déphasées (ou avec un déphasage multiple de  $2\pi$ ) vont avoir une amplitude doublée car seront maximales au même moment.
- Deux ondes identiques et de même nature en opposition de phase (décalée d'un multiple de  $\pi$ ) vont s'annuler car l'une sera maximale quand l'autre minimale. C'est ce principe qui est utilisé pour les casques anti-bruit avec réduction active.

#### VI.6 Superposition de deux ondes progressives sinusoïdales

Considérons la superposition d'ondes « l'addition de deux ondes progressives sinusoïdales de même pulsation ». En notation complexe, on écrit alors l'onde totale, somme des deux ondes.

Soit les 02 grandeurs sinusoïdales de mêmes pulsations : Notons :  $(kxVt) = \psi$

$$y_1(x, t) = a_1 \cos(kxVt + \phi_1) \text{ et } y_2(x, t) = a_2 \cos(kxVt + \phi_2)$$

Utilisons la représentation complexe pour calculer :  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

$$y_1(x, t) = \overline{a_1} e^{j\psi t} \text{ Et } y_2(x, t) = \overline{a_2} e^{j\psi t}$$

$$\Rightarrow y_1(x, t) + y_2(x, t) = \overline{a_1} e^{j\psi t} + \overline{a_2} e^{j\psi t} = (\overline{a_1} + \overline{a_2}) e^{j\psi t}$$

$$\text{On note } a = \overline{a_1} + \overline{a_2} \Rightarrow y_1(x, t) + y_2(x, t) = y(t) = a e^{j\psi t}$$

$a$  : Nombre complexe

$$|a| = |a_1 e^{j\phi_1} + a_2 e^{j\phi_2}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

$$\text{Et une phase } \phi \text{ qui satisfait : } \tan \phi = \frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2}$$

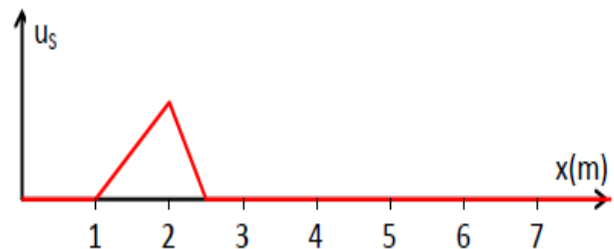
$$\text{On peut écrire } a = |a| e^{j\phi}$$

$$\Rightarrow y(t) = |a| e^{j(\psi t + \phi)} = y_1(x, t) + y_2(x, t)$$

### Application :

À l'instant  $t_1 = 0,2 \text{ s}$  ; l'aspect d'une corde parcourue par une onde transversale de célérité  $V=20\text{m/s}$  est modélisé sur la figure ci-contre

1. Quelles sont les coordonnées des points correspondants au début et à la fin du signal
2. Quelle est la longueur de la corde effectuée par l'onde



3. À quel instant  $t_2$  l'onde atteint-elle un point d'abscisse **5 m**.

### Solution :

1. D'après le graphe proposé donnant l'aspect de la corde à chaque instant  $t$ , la lecture directe de ce graphe montre qu'à l'instant  $t_1 = 0,2 \text{ s}$  ; le début de la déformation a déjà atteint 2,5 m alors que la fin de cette déformation n'a atteint que 1 m.

2. La longueur d'une est de :  $(2,5-1) = 1,5\text{m}$

3. À l'instant  $t_2$  le front de l'onde atteint 5m. entre  $t_1$  et  $t_2$  la déformation a progressé de:  $(5- 2,5) = 2,5\text{m}$ , avec une vitesse de  $V=20\text{m/s}$  :

$$\Delta t = \frac{2,5}{20} \Rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t = 0,2 + 0,125 = 0,325\text{s}$$

---

**VI.7 Exercices sur la propagation des ondes**
**Exercice VI.1**


---

On considère une onde progressive :  $y(x, t) = 2 \sin\left(4\pi Vt + \frac{\pi}{6}\right)$ . On prendra  $f=100\text{Hz}$  et  $V=100\text{m/s}$ . Représenter chacune de ces trois fonctions en précisant bien la variable et l'échelle sur l'axe des abscisses.  $y(x, t = 0)$ ,  $y(x, t = 0.2\text{s})$  et  $y(x = 0.2\text{m}, t)$

**Exercice VI.2**


---

On considère une corde tendue comme sur laquelle est suspendue une masse  $m = 1\text{ kg}$ . On prendra  $g = 9,81\text{ m.s}^{-2}$ . On note  $y(x, t)$  le déplacement de la corde par rapport à sa position au repos.

1. Montrer que la vitesse de propagation des ondes est  $v = T\mu$ , où  $T = mg$  est la tension de la corde et  $\mu = 50\text{ g/m}$  est la masse par unité de longueur de la corde.
2. Quelle est la vitesse de propagation de l'onde ?

**Exercice IV.3**


---

Montrer que les fonctions suivantes sont une solution de l'équation de propagation à 1 dimension

$$y(x, t) = A \cos(k(x - Vt))$$

$$y(x, t) = A e^{(i\omega t + \frac{x}{V})}$$

# *Conclusion*

Au terme de ce cours, les étudiants peuvent retenir les différentes étapes permettant l'étude des phénomènes de vibrations mécaniques restreintes aux oscillations de faible amplitude pour un ou deux degrés de liberté ainsi que l'étude de la propagation des ondes mécaniques. En effet, cette étude permet d'établir l'équation différentielle qui régit le mouvement d'un système. Après l'identification du nombre de coordonnées nécessaires pour configurer le système, un choix de formalise basé soit sur l'équilibre des forces ou sur le bilan énergétique de l'oscillateur s'impose.

Le présent polycopié comprend six chapitres. Le premier présente des généralités sur le mouvement périodique ainsi que l'évaluation des équations différentielles régissant les oscillations d'un système mécanique. Le deuxième et le troisième traitent de manière détaillée les vibrations des systèmes régis par une seule coordonnée généralisée (1DDL), oscillant respectivement en absence et en présence des excitations dépendantes du temps. Dans le quatrième et cinquième chapitre, les oscillations libres et forcées des systèmes à 2DDL sont respectivement étudiées. Le sixième chapitre aborde le phénomène de propagation des ondes, et plus particulièrement il s'intéresse à la résolution de l'équation de propagation d'Alembert à seule dimension.

Le cours présente également un ensemble d'exemples d'application traités et solutionnés en détail, ainsi une liste d'exercices classés par difficulté croissante proposés pour permettre de mieux assimiler les phénomènes de vibration et initier

# *Références bibliographiques*

- A. Perrenoud, « Physique 2 Ondes » ; Edition novembre de la haute école d'ingénierie et de gestion de Canton de Vaud, 2010, p73, <http://heig-vd.ch> (Consulté le : 12/01/2020)
- F. Hammad, « Vibrations & Ondes » ; Université A. Mira de Bejaia, 2013, p52, <http://exerev.yolasite.com/> et <http://sites.google.com/site/exerev> (Consultés le : 24/09/2018)
- H. Djelouah, « Vibrations et Ondes Mécaniques Cours & Exercices » ; Polycopié de l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2012, p122, disponible sur : [http://perso.usthb.dz/~smehdi/PagePerso/cours/vom/cours\\_vom\\_djelouah.pdf](http://perso.usthb.dz/~smehdi/PagePerso/cours/vom/cours_vom_djelouah.pdf) Consulté le : 10/01/2020)
- J. Brac, « Propagation d'ondes acoustiques et élastiques » ; Hermès science Publisher, Éditions Lavoisier, Paris, 2003, p272
- J. Bruneaux, « Vibrations, ondes » ; Ellipses éditions, Paris, 2008, p358
- M. Roseau, « Vibrations des systèmes mécaniques » ; Masson, Paris, 1984, p234
- N. Aklouche, « Cours de Physique 3 (Partie Ondes) » ; Polycopié de l'université Ferhat Abbas – Sétif, 2012, p53, <http://www.n.aklouche.sitew.com/> (Consulté le : 02/01/2020)
- N. Aklouche, « Cours de Physique 3 (Partie Vibrations) » ; Polycopié de l'université Ferhat Abbas – Sétif, 2012, p39, <http://www.n.aklouche.sitew.com/> (Consulté le : 02/10/2018)
- T. Becherrawy, « Vibrations, ondes et optique » ; Hermes science, Éditions Lavoisier, Tome4, Paris, 2010, p400
- T. Becherrawy, « Vibrations, ondes et optique » ; Hermes science, Éditions Lavoisier, Tome1, Paris, 2007, p488
- W.T. Thomson, « Theory of vibrations with applications » ; 2nd edition, Prentice-Hall, New York, 1981. p524
- Y. Rocard, « Dynamique générale des vibrations » ; (4ème éd.), Masson, Paris, 1971, p459